

**Principales propriétés d'un système
de lentilles, d'après M. Möbius,
professeur à Leipzig**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 667-673

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__667_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS

d'un système de lentilles.

D'après M. Möbius, professeur à Leipzig. (Crelle, t. V, p. 113; 1830.)

I. LEMME. Soit la fraction continue :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b - \frac{1}{c - \frac{1}{d}, \text{ etc.}}} - \frac{1}{k} = F.$$

Faisant $[a, b] = ab - 1$; $[a, b, c] = [a, b]c - a$.

$$[a, b, c, d] = [a, b, c]d - [a, b] ;$$

$$[a, b, c, d, e] = [a, b, c, d]e - [a, b, c],$$

et ainsi de suite, on a :

$$F = \frac{[b, c, d \dots k]}{[a, b, c, d \dots k]} ;$$

et l'on a les identités :

$$[a, b, c \dots i][b, c, d \dots k] - [a, b, c \dots k][b, c, d \dots i] = 1,$$

$$[a, b, c \dots i, k] = [k, i \dots b, a].$$

Ces formules sont démontrées dans les *Éléments*.

II. LEMME. Soit a la distance de l'objet au centre de la lentille, et b la distance de l'image au même point ; l'objet et l'image étant dans l'axe ; si f est la distance focale principale de la lentille ; on a $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. (*Voir les traités d'optique.*)

A. *Système de lentilles, l'objet étant dans l'axe du système.*

Notations.

III. Soient $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ les centres des lentilles, tous sur une même droite :

A l'objet devant la première lentille P_1 , A_1 l'image entre P_1 et P_2 ; A_2 l'image entre P_2 et P_3, \dots ; A_n devant le dernier verre P_n ; faisant :

$$AP_1 = a_1 ; A_1P_2 = a_2 ; A_2P_3 = a_3 ; \dots A_{n-1}P_n = a_n ;$$

$$P_1A_1 = b_1 ; P_2A_2 = b_2 \dots P_nA_n = b_n.$$

h_1, h_2, \dots, h_{n-1} étant les distances respectives des lentilles $P_1, P_2 ; P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$, on aura :

$$b_1 + a_2 = h_1 ; b_2 + a_3 = h_2 \dots b_{n-1} + a_n = b_{n-1}.$$

Si nous désignons par $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ les valeurs *reciproques* des distances focales des lentilles, on aura (Lemme II) :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = g_1 ; \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = g_2 \dots \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = g_n.$$

Observation. Les signes de g_1, g_2, \dots sont déterminés par la forme concave ou convexe des lentilles.

De même pour b_1, b_2, \dots etc. ; mais h_1, h_2, \dots sont toujours à prendre avec le signe +

Lieu de la dernière image.

IV. On déduit facilement de ces deux systèmes d'équation :

$$b_1 = \frac{a_1}{[g_1, a_1]} ; \quad b_2 = \frac{[h_1, g_1, a_1]}{[g_2, h_1, g_1, a_1]} \dots$$

et enfin

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2} \dots h_1, g_1, a_1]}{[g_n, h_{n-1}, g_{n-1} \dots h_1, g_1, a_1]} = \\ &= \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2} \dots h_1, g_1] a_1 - [h_{n-1}, g_{n-1} \dots h_1]}{[g_n, h_{n-1} \dots h_1, g_1] a_1 - [g_n, h_{n-1} \dots h_1]} = \\ &= \frac{[g_1, h_1, g_2 \dots h_{n-1}] a_1 - [h_1, g_1 \dots h_{n-1}]}{[g_1, h_1 \dots g_n] a_1 - [h_1, g_1 \dots g_n]} \end{aligned}$$

Faisons $[g_1, h_1, \dots, h_{i-1}] = H_i$; $[h_1, g_1, \dots, h_{i-1}] = -L_i$;
 $[g_1, h_1, \dots, g_{i-1}] = M_i$; $[h_1, g_1, \dots, g_{i-1}] = -N_i$;
 on aura :

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}}$$

Cette expression a été donnée sous cette forme par Lagrange (M. de Berlin, 1778 et 1803) :

$$\text{pour } a_1 = \infty, \text{ on a } b_n = \frac{H_n}{M_{n+1}} ;$$

$$\text{et pour } b_n = \infty, a_1 = -\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}}.$$

Calcul de H, M, L, N.

Première méthode.

V. Les calculs de ces quantités, qui ne dépendent que de la construction de la lunette, s'abrègent au moyen de ces relations faciles à trouver :

$$H_{i+1} = h_i M_{i+1} - H_i,$$

$$L_{i+1} = h_i N_{i+1} - L_i,$$

$$M_{i+1} = g_i H_i - M_i,$$

$$N_{i+1} = g_i L_i - N_i.$$

Connaissant les résultats pour n lentilles, on en déduit ceux pour $n + 1$ lentilles.

Deuxième méthode.

$$\begin{aligned} H_{i+1} &= [h_i, g_i, h_{i-1} \dots g_2, h_1, g_1] \\ &= \frac{[h_i, g_i, h_{i-1} \dots g_1]}{[g_i \dots g_1]} \cdot \frac{[g_i, h_{i-1} \dots g_1]}{[h_{i-1} \dots g_1]} \dots \frac{[g_2, h_1, g_1]}{[h_1, g_1]} \cdot \frac{[h_1, g_1]}{g_1} \cdot g_1 \\ &= (h_i \dots g_i) (g_i \dots g_1) \dots (g_2, h_1, g_1) \cdot (h_1, g_1) \cdot g_1. \end{aligned}$$

Les quantités renfermées entre les parenthèses () représentent les valeurs de fractions continues ; ainsi :

$$(h_2 g_1) = h_1 - \frac{1}{g_1} ; (g_2, h_1, g_1) = g_2 - \frac{1}{(h_1, g_1)}, \text{ etc.}$$

Faisant donc :

$$h_1 - \frac{1}{g_1} = \sigma ; g_2 - \frac{1}{\alpha} = \beta ; h_2 - \frac{1}{\beta} = \gamma ; g_3 - \frac{1}{\gamma} = \delta ,$$

on aura :

$$H_2 = \alpha g_1 ; H_3 = \gamma \beta \alpha g_1 ; \text{ et } M_2 = g_1 ; M_3 = \beta \alpha g_1, \dots \text{ etc.}$$

Et faisant de même :

$$g_2 - \frac{1}{h_1} = \mu ; h_2 - \frac{1}{\alpha} = \nu , g_3 - \frac{1}{\nu} = \pi \dots$$

on aura :

$$\begin{aligned} -N_3 &= \mu h_1 ; -N_4 = \pi \nu \mu h_1, \dots ; -L_2 = h_1 ; -L_3 = \nu \mu h_1 ; \\ &-L_4 = \varphi \pi \nu \mu h_1. \end{aligned}$$

Cette méthode est de M. Gabrio Piola (Éphémérides de Milan, 1822).

B. L'objet n'étant pas dans l'axe du système.

Notations.

VI. Soit C le lieu de l'objet ; C₁ le lieu de la première image entre P₁ et P₂ ; C₂ le lieu de l'image entre P₂ et P₃ ... ; et C_n le lieu de la dernière image devant P_n : et on sait, par les principes de dioptrique, que C, P₁ et C₁ sont sur une

même droite, ainsi que C_1, P_2, C_2 , etc. de sorte que tous ces points sont dans un même plan passant par l'axe. Prenons sur l'axe une distance $PA = PC$; ou, ce qui dans le cas actuel revient au même, abaissons la perpendiculaire CA sur l'axe; de même les perpendiculaires $C_1A_1; C_2A_2; C_nA_n$: A, A_1, A_2, \dots, A_n représentent les mêmes points que ci-dessus, et nous conservons les mêmes notations. Faisons de plus :

$$AC = c; A_1C_1 = c_1; A_2C_2 = c_2 \dots A_nC_n = c_n;$$

on a évidemment :

$$\frac{c}{c_1} = -\frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{c_1}{c_2} = -\frac{a_2}{b_2} \dots$$

d'où

$$\frac{c}{c_n} = (-1)^n \frac{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}{b_1 \cdot b_2 \dots b_n}.$$

Or

$$b_i = \frac{H_i a_i + L_i}{M_{i+1} a_i + N_{i+1}},$$

d'où

$$a_{i+1} = h_i - b_i = \frac{H_{i+1} a_i + L_{i+1}}{M_{i+1} a_i + N_{i+1}};$$

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{M_{i+1} a_i + N_{i+1}}{M_i a_i + N_i};$$

$$\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} = \frac{M_i a_i + N_i}{M_{i-1} a_i + N_{i-1}};$$

d'où

$$\frac{a_i}{b_i} \cdot \frac{a_{i-1}}{b_{i-1}} \dots \frac{a_1}{b_1} = \frac{M_{i+1} a_i + N_{i+1}}{M_i a_i + N_i} = M_{i+1} a_i + N_{i+1};$$

car

$$M_i = 0; \quad N_i = 1;$$

et

$$c_n = \frac{(-1)^n c}{M_{n+1} a_i + N_{n+1}}. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

C. Propriétés analogues d'une lentille et d'un système de lentilles.

Une lentille.

VI. Soit A l'objet placé devant la lentille P, et B son

image ; F le foyer principal de la lentille P du côté de l'objet A, et G le foyer principal du côté de l'image ; de sorte que $PF = PG = f$.

Faisons $AP = a$; $BP = b$; on aura :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} ; \quad AF = a - f = \alpha ; \quad GB = b - f = \beta.$$

d'où :

$$\alpha\beta = f^2 ; \quad \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{f}{\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} ;$$

$\frac{a}{b}$ est égal au diamètre de l'objet divisé par le diamètre de l'image. Appelant F le premier foyer principal et G le second foyer, nous avons ce théorème :

« La distance focale d'une lentille est moyenne proportionnelle entre la distance de l'objet au premier foyer et la distance de l'image au second foyer. Le diamètre de l'objet est à celui de l'image comme les racines carrées de ces distances. Les foyers principaux sont compris entre l'objet et l'image (lentille bi-convexe), ou l'inverse a lieu (lentille bi-concave).

Un système de lentilles.

VII. Reprenons les notations du paragraphe III.

Faisons $A_1 = p + \nu$; $b_n = q + \beta$; p, q, α, β sont quatre indéterminées.

On a trouvé :

$$M_{n+1} a_1 b_n - H_n a_1 + N_{n+1} b_n = L_n \quad (\text{IV}).$$

Remplaçant a_1 et b_n par leurs valeurs, il vient :

$$\begin{aligned} M_{n+1} \alpha \beta + (M_{n+1} q - H_n) \alpha + (M_{n+1} p + N_{n+1}) \beta = \\ = L_n - M_{n+1} p q + H_n p - N_{n+1} q. \end{aligned}$$

Faisons $M_{n+1} q - H_n = 0$; $M_{n+1} p + N_{n+1} = 0$;

l'équation se réduit à :

$$M_{n+1} \alpha \beta = L_n + H_n p ;$$

et éliminant p .

$$M_{n+1}^2 \alpha \beta = L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1} = 1.$$

D'après les propriétés des fractions continues (1), faisant

$$\frac{1}{M_{n+1}} = f, \text{ on a donc, comme pour une lentille, } \alpha \beta = f^2.$$

Déterminant donc sur l'axe deux points F et G, de sorte qu'on ait :

$$P_1 F = p = -\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}} \text{ et } P_n G = g = \frac{H_n}{M_{n+1}}.$$

F est le *premier foyer principal* du système, et G le *second foyer principal* (voir IV). On a encore $AF \cdot GA_n = f^2$, et on déduit pour ce système le même théorème que pour une seule lentille.

Le rapport du diamètre de l'objet à celui de l'image = $\frac{(-1)^n c}{c^n} = M_{n+1} \alpha_1 + N_{n+1} = M_{n+1}(\alpha + p) + N_{n+1} = M_{n+1} \alpha = \frac{\alpha}{f} = \frac{f}{\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{AF}{GA_n}}$, comme dessus.

D. *Télescopes dioptriques.*

VII. On appelle de ce nom un système de lunettes où les rayons incidents sur la première lentille, ainsi que les rayons émergents, sont parallèles; alors $f = 0$; donc $g_n = 0$; et $M_{n+1} = 0$; l'on a donc :

$$b_n = \frac{H_n \alpha_1 + L_n}{N_{n+1}}; \text{ à } \alpha_1 = \infty \text{ répond } b_n = \infty, \text{ ainsi que cela doit être.}$$

On a $N_{n+1} c_n = (-1)^n c$; donc, quelle que soit la distance de l'objet, la grandeur de l'image ne varie pas.

On trouve dans les traités de physique les conséquences *dioptriques* de ces diverses formules, qui semblent plus simples que celles que l'on lit au tome II du *Traité d'Astronomie physique*, édit. de 1844.