HENRI BINDER

Solution du problème 98

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 656-658

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__656_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 98 (p. 368).

PAR M. HENRI BINDER,
élève en élémentaires du collége Charlemagne (institution Favard).

—

Soit n_3 le nombre des faces triangulaires; n_4 celui des faces quadrangulaires d'un polyèdre, et N le nombre des diagonales du polyèdre, faisant :

$$n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots = L$$
$$1.3.n_3 + 2.4n_4 + 3.5.n_5 + 4.6n_6 = M$$

on a

$$8N = (2 + L)(4 + L) - 4M.$$

Si n_3 est le nombre des faces triangulaires, n_4 celui des faces quadrangulaires, etc., on aura en appelant H le nombre des faces :

$$H = n_3 + n_4 + n_5 + \ldots$$

Le nombre des côtés de tous ces polygones réunis sera

$$3n_3 + 4n_4 + 5n_5, \text{ etc.},$$

comme deux de ces côtés réunis forment une arête, on aura en appelant A le nombre des arêtes :

$$2A = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \ldots$$

Remarquons que le nombre des diagonales que l'on peut mener dans un polyèdre, est égal au nombre des lignes qui joignent tous les sommets deux à deux, diminué du nombre des arêtes et du nombre des diagonales que l'on peut mener dans chacune des faces ; cela posé, cherchons chacun de ces nombres.

Soit S le nombre des sommets ; le nombre total des droites qui joignent les sommets est évidemment $\frac{S(S-1)}{1.2}$.

Nous connaissons le nombre A des arêtes ; il reste à avoir le nombre des diagonales que l'on peut mener dans chaque face.

Or, le nombre des diagonales que l'on peut mener dans un polygone, est égal au nombre des lignes, joignant deux à deux tous les sommets, diminué du nombre des côtés de ce polygone ; donc : pour avoir le nombre de diagonales que l'on pourra mener dans les faces réunies du polyèdre, nous prendrons chacune de ces faces en particulier, et du nombre des lignes joignant tous les sommets deux à deux, nous retrancherons le nombre des côtés, et nous ferons la somme ; nous avons ainsi :

Pour les faces réunies

$$\frac{3.2}{2}n_3+\frac{4.3}{2}n_4+\frac{5.4}{2}n_5\ldots-3n_3-4n_4-5n_5,$$

ou

$$\frac{3.2}{2}n_3+\frac{4.3}{2}n_4+\frac{5.4}{2}n_5\ldots-2A\,;$$

donc, on aura

$$N=\frac{S.(S-1)}{2}-A-\left(\frac{3.2}{2}n_3+\frac{4.3}{2}n_4+\ldots-2A\right)$$

d'où

$$N=\frac{S.(S-1)}{2}-\left\{\frac{3.2}{2}n_3+\frac{4.3}{2}n_4+\ldots\right\}+\left\{\frac{3}{2}n_3+\frac{4}{2}n_4+\ldots\right\},$$

ou

$$N=\frac{S.S-1}{2}-\frac{1}{2}\left\{1.3.n_3+2\cdot 4u_4+3.5n_5+\ldots.\right\}.$$

Multipliant par 8 de part et d'autre :

$$8N=2S.(2S-2)-4.M:$$

en prenant la notation indiquée dans l'énoncé ; or , le théorème connu d'Euler donne :

$$S=A-H+2$$
$$2S=2A-2H+4$$

or

$$2A-2H=n_3+2n_4+3n_5+\ldots.=L$$

donc

$$8N=(2A-2H+4)(2A-2H+2)-4M$$
$$8N=(L+4)(L+2)-4M,\ c.\ q.\ f.\ d.$$