THIBAULT

Problèmes combinatoires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 627-636

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__627_0>

PROBLÈMES COMBINATOIRES.

PAR M. THIBAULT,
Professeur, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

1. *Problème*. Étant données différentes séries, la première de m lettres a, b, c..., la seconde de m' lettres a', b', c'..., la troisième de m'' lettres a'', b'', c''..., etc. déterminer le nombre des arrangements qu'on peut faire, chaque arrangement devant contenir n lettres de la première série, n' lettres de la deuxième, n'' de la troisième, etc.

Il y a deux cas à considérer, savoir : 1° si aucune lettre ne doit se répéter dans un même arrangement; 2° si une même lettre peut se répéter plusieurs fois.

1[er] *cas. Arrangements sans répétitions*. Commençons par former tous les arrangements possibles des m lettres de la première série n à n; leur nombre est donné par la formule connue $m\,(m-1)\,\ldots\,(m-n+1)$; nous le représenterons par $A_{m,n}$.

Dans l'un quelconque de ces arrangements, introduisons une lettre a' de la seconde série à toutes les places possibles qui sont au nombre de $n+1$; il en résultera $n+1$ arrangements nouveaux L'introduction de chacune des autres lettres b',c',... en fournira le même nombre, ce qui fait en tout $(n+1)\,m'$ arrangements nouveaux provenant de l'arrangement considéré. La même chose étant faite pour chacun des $A_{m,n}$ arrangements déjà formés, il en résultera $(n+1)\,m'A_{m,n}$ arrangements composés chacun de n lettres de la première série, et d'une lettre de la deuxième.

Dans l'un quelconque de ces derniers arrangements, affectons pour un instant de l'indice 1, la lettre de la seconde série qu'il contient ; puis introduisons-y une deuxième lettre de cette série en l'affectant de l'indice 2. Cette nouvelle lettre pouvant se mettre à toutes les places qui sont au nombre de $n+2$, il en résultera $n+2$ arrangements nouveaux. En introduisant de cette manière dans l'arrangement considéré chacune des $m'-1$ lettres de la seconde série qui ne se trouvaient pas dans cet arrangement, il en résultera en tout $(n+2)(m'-1)$ arrangements. La même chose étant faite pour chacun des $(n+1)\,m' \mathrm{A}_{m,n}$ arrangements primitifs, on aura en tout

$$(n+1)(n+2) \times m'(m'-1)\,\mathrm{A}_{m,n}$$

arrangements composés de n lettres de la première série, et de deux lettres de la seconde, ces deux dernières étant affectées des indices 1,2, d'après l'ordre de leur introduction.

On suivra le même ordre de formation jusqu'à ce qu'on ait introduit dans chaque arrangement n' lettres de la deuxième série, et en affectant successivement les nouvelles lettres introduites des indices 3,4, ... n'. On aura ainsi tous les arrangements qu'on peut former avec n lettres de la première série, et n' lettres de la deuxième, différents entre eux soit par les lettres, soit par l'ordre de ces lettres, soit par l'ordre des indices ; leur nombre sera

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+n') \times m'(m'-1)\ldots(m'-n'+1)\,\mathrm{A}_{m,n},$$

qui peut s'écrire $(n+1)(n+2)\ldots(n+n')\,\mathrm{A}_{m,n}\mathrm{A}_{m',n'}$.

Observons actuellement qu'un même arrangement de lettres se trouvera reproduit avec toutes les permutations possibles dans l'ordre des indices, c'est-à-dire $1.2\ldots n'$ fois. Si donc on supprime les indices, le nombre des arrangements différents deviendra $1.2\ldots n'$ fois moindre. *Dans le cas de deux séries seulement, la formule cherchée est donc*

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots.(n+n')\,\mathrm{A}_{m,n}\mathrm{A}_{m'n'}}{1.2\ldots.n'},$$

qui peut s'écrire sous la forme symétrique.

$$\frac{1.2\ldots.(n+n')}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots n'}\,\mathrm{A}_{m,n}\mathrm{A}_{m'n'}\qquad (1)$$

Au moyen des arrangements relatifs à deux séries, on obtiendra ceux qui sont relatifs à trois, en suivant exactement la même marche pour introduire les m'' lettres de la troisième série n'' à n''. On trouvera ainsi que *la formule relative à trois séries est*

$$\frac{1.2\ldots(n+n'+n'')}{1.2..\,n\times 1.2\ldots n'\times 1\ 2\ldots.n''}\,\mathrm{A}_{m,n}\mathrm{A}_{m',n'}\mathrm{A}_{m'',n''};$$

On trouvera de même que *la formule générale cherchée, relativement à toutes les séries, est :*

$$\frac{1.2\ldots.(n+n'+n''+\ldots)}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots n'\times 1.2\ldots n''\times\ldots.}\,\mathrm{A}_{m,n}\mathrm{A}_{m',n'}\mathrm{A}_{m'',n''}\ldots.\qquad (\mathrm{A})$$

Deuxième cas. Arrangements avec répétitions. On suivra exactement la même marche que pour les arrangements sans répétitions. Mais alors $\mathrm{A}_{m,n}$ représentera le nombre m^n qui exprime combien on peut faire d'arrangements n à n avec répétitions au moyen de m lettres. L'introduction de $1.2,..n'$ lettres de deuxième série, avec les indices respectifs $1, 2, ..n'$, dans les $\mathrm{A}_{m,n}$ arrangements des lettres de la première série, conduit à des arrangements successifs, dont les nombres sont respectivement

$$(n+1)\,m'\mathrm{A}_{m,n},\ (n+1)\,(n+2)\times m'^{2}\,\mathrm{A}_{m,n},\ldots..$$
$$(n+1)\,(n+2)\ldots.(n+n')\times m'^{n'}\mathrm{A}_{m,n}.$$

Si on supprime les indices, le nombre total des arrangements est

$$\frac{(n+1)\,(n+2)\ldots.(n+n')}{1.2\ldots n'}\times m'^{n'}\mathrm{A}_{m,n}$$

nombre qui, en représentant $m'^{n'}$ par $A_{m',n'}$, prend la forme symétrique exprimée par la même formule (1) qu'on a obtenue pour le cas des arrangements sans répétitions.

On trouvera de même que *le nombre des arrangements relatif à toutes les séries, est exprimé par la formule* (A) *ci-dessus*.

Si les lettres d'une ou de plusieurs séries pouvaient se répéter et que les autres ne le pussent pas, le nombre des arrangements serait exprimé encore par la même formule (A), en considérant $A_{m,n}$, $A_{m',n'}$, etc., comme représentant des nombres d'arrangements avec ou sans répétitions, suivant que les lettres des séries correspondantes pourraient ou non se répéter.

II. PROBLÈME. *Dans le nombre total des arrangements avec ou sans répétitions, considérés dans le problème précédent, combien de fois se rencontre-t-il que des lettres d'une même série, de la première par exemple, se succèdent* 1° *par groupes de* p *lettres au moins*; 2° *par groupes formés exactement de* p *lettres ?*

Nous emploierons les notations $A_{m,n}$, etc., comme dans le problème précédent, pour représenter les nombres d'arrangements de m lettres n à n, etc., avec ou sans répétitions de lettres.

Considérons d'abord, pour fixer les idées, les arrangements où les lettres de la première série sont assujetties à ne pas se répéter.

Formons toutes les successions possibles des m lettres de la première série p à p sans répétitions, ce qui donnera $A_{m,p}$ groupes différents. Considérons l'un de ces groupes en particulier, et formons aussi tous les arrangements possibles contenant $n-p$ lettres de la première série, n' lettres de la deuxieme, n'' lettres de la troisième, etc., mais dont seront exclues les p lettres du groupe considéré, arrangements dont le nombre est exprimé par la formule (A), en y remplaçant m, n par $m-p$, $n-p$. Si nous plaçons le groupe considéré devant et après l'un des arrangements formés, et entre ses diverses lettres à toutes les places possibles, il en résultera $1+(n-p)+n'+n''+\ldots$ arrangements. Si on combine de la même manière ce groupe avec chacun des autres arrangements formés, il en résultera un nombre d'arrangements exprimé par

$$[1+(n-p)+n'+\ldots]\,\frac{1.2..\,((n-p)+n'+\ldots)}{1.2\ldots(n-p)\times 1.2\ldots n'\times\ldots}\,A_{m-p,n-p}\,A_{m',n'}\ldots$$

qui revient à :

$$\frac{1.2\ldots(1+(n-p)+n'+\ldots)}{1.2\ldots\ldots(n-p)\times 1.2\ldots\ldots n'\times\ldots\ldots}\,A_{m-p,n-p}\,A_{m',n'}\ldots \quad (2)$$

La formule (2) exprime combien de fois une succession déterminée de p lettres se trouve dans tous les arrangements formés de n lettres de la première série, de n' lettres de la deuxième, etc. Chacune des $A_{m,p}$ successions de p lettres que l'on peut former avec la première série, devant se rencontrer le même nombre de fois dans ces arrangements, il faut multiplier la formule précédente par $A_{m,p}$, pour exprimer combien il se rencontre en tout de successions de p lettres de la première série. Dans le produit obtenu remplaçons

$$A_{m,p}\times A_{m-p,n-p}$$

par sa valeur

$$m(m-1)\ldots(m-p+1)\times(m-p)(m-p-1)\ldots\,\big((m-p)-(n-p)+1\big),$$

ou

$$m\,(m-1)\ldots(m-n+1),$$

c'est-à-dire par $A_{m,n}$, ce produit devient :

$$\frac{1.2\ldots(1+(n-p)+n'+\ldots)}{1.2\ldots(n-p)\times 1.2\ldots n'\times\ldots}\,A_{m,n}\,A_{m',n'}\ldots \quad (3)$$

La formule (3) exprimerait encore, si les lettres de la première série pouvaient se répéter, combien il se rencontre de successions de p lettres de cette série dans tous les arrangements. On parviendrait à cette formule de la même manière ; seulement les lettres d'un groupe n'étant pas exclues des arrangements entre les lettres desquels on intercale ce groupe, il faudra dans la formule (2) remplacer

$$A_{m-p,n-p} \text{ par } A_{m,n-p}\,.$$

puis observer ensuite que le produit $A_{m,p} \times A_{m,n-p}$ revient à $m^p \times m^{n-p}$ ou m^n, c'est-à-dire à $A^{m,n}$.

La formule (3) etant également applicable aux arrangements avec ou sans répétitions, il doit en être de même de tout ce que nous allons en déduire.

Si l'on désigne par G_p, G_{p+1},.... les nombres des groupes formés respectivement de $p, p+1$,.... lettres consécutives de la première série, qui se rencontrent dans l'ensemble de tous les arrangements, l'expression (3) est égale à $G_p + 2G_{p+1} + 3G_{p+2} +$ etc. En effet, un groupe de p lettres ne donne lieu qu'à une des successions considérées, tandis qu'un groupe de $p+1$ lettres donne lieu à deux successions de p lettres, l'une commençant à la première lettre du groupe, l'autre à la deuxième. De même un groupe de $p+2$ lettres, donne lieu a trois successions et ainsi de suite. De l'égalité

$$G_p + 2G_{p+1} + 3G_{p+2} + \ldots. =$$
$$= \frac{1.2\ldots(1+(n-p)+n'+\ldots)}{1.2\ldots(n-p)\times 1.2\ldots n'\times\ldots} A_{m,n}A_{m',n'}\ldots$$

on déduit, par le changement de p en $p+1$,

$$G_{p+1} + 2G_{p+2} + \ldots. =$$
$$= \frac{1.2\ldots((n-p)+n'+\ldots)}{1.2\ldots(n-p-1)\times 1.2\ldots n'\times\ldots} A_{m,n}A_{m',n'}\ldots$$

soustrayant la deuxième égalité de la première, il vient :

$$G_p + G_{p+1} + G_{p+2} + \ldots =$$
$$\frac{1.2\ldots[(n-p)+n'+\ldots]}{1.2..(n-p-1)\times 1.2..n'\times ..} A_{m,n}A_{m',n'}\ldots \times$$
$$\times \left(\frac{1+(n-p)+n'+\ldots}{n-p} - 1\right)$$

ou, en réduisant

$$G_p + G_{p+1} + G_{p+2} + \ldots =$$
$$\frac{1.2\ldots[(n-p)+n'+\ldots]}{1.2..(n-p)\times 1.2..n'\times\ldots}(1+n'+n''+\ldots)\, A_{m,n}A_{m',n'}\ldots . \quad \text{(B)}$$

C'est la première formule cherchée, qui exprime combien de fois il se rencontre de groupes de p lettres consécutives au moins de la première série.

Dans la formule (B) remplaçons p par $p+1$, et soustrayons de (B) le résultat, il vient après une réduction toute semblable à celle qui précède

$$G_p = \frac{1.2\ldots[(n-p)-1+n'+n''+..]}{1.2\ldots(n-p)\times 1.2\ldots n'+\ldots}$$
$$(1+n'+n''+\ldots)(n'+n''+\ldots)\, A_{m,n}A_{m'n'}\ldots \quad \text{(C)}$$

C'est la deuxième formule cherchée, qui exprime combien de fois il se rencontre des groupes de p lettres consécutives de la première série.

Comme application très-simple des formules (A), (B), considérons la question suivante : *déterminer le nombre de mots qu'on peut former avec* 19 *consonnes et* 5 *voyelles, chaque mot étant composé de* 3 *consonnes et de* 2 *voyelles ; en excluant les mots renfermant trois consonnes de suite.*

Le nombre total des mots est donné par la formule (A), appliquée à deux séries ; on trouve

$$\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3\times 1.2}.\, 19^3.5^2 \quad \text{ou} \quad 10.19^3.5^2.$$

La formule (B), dans laquelle on supprimera d'abord haut et bas le facteur $1.2...(n-p)$, donne ensuite le nombre des mots exclus, savoir

$$\frac{1.2}{1.2}.(1+2)\,19^3.5^2 \quad \text{ou} \quad 3.19^3.5^2.$$

Il reste ainsi pour le nombre de mots demandé

$$7.19^3.5^2 \quad \text{ou} \quad 1200325.$$

III. Diverses méthodes pour obtenir directement la formule connue

$$C_{m,n}=\frac{m\,(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2.\,..n},$$

qui exprime le nombre des combinaisons sans répétitions, que l'on peut faire avec m lettres n à n.

Première méthode Supposons formés les $C_{m,n-1}$ combinaisons des m lettres $n-1$ à $n-1$. Dans chacune d'elles introduisons séparément chacune des $m-n+1$ lettres qui y manquent, l'ensemble ainsi formé contiendra

$$(m-n+1)\,C_{m,n-1},$$

combinaisons n à n. Mais ce nombre de combinaisons sera aussi exprimé par $nC_{m,n}$; car dans l'ensemble formé, chacune des $C_{m,n}$ combinaisons des m lettres n à n, se trouvera répétée n fois, puisqu'elle peut résulter indifféremment de l'introduction de l'une quelconque de ses n lettres, dans la combinaison précédemment formée des $n-1$ autres. On a donc :

$$(m-n+1)\,C_{m,n-1}=nC_{m,n},$$

d'où

$$C_{m,n}=\frac{m-n+1}{n}\,C_{m,n-1}.$$

Or on a

$$C_{m,1}=\frac{m}{1};$$

donc

$$C_{m,2}=\frac{m(m-1)}{1.2},\ldots\ldots C_{m,n}=\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}.$$

Deuxième méthode. Parmi toutes les combinaisons des m lettres n à n, il y en a $C_{m-1,n-1}$ qui contiennent a. Car on obtient celles-ci en ajoutant a à chacune des $C_{m-1,n-1}$. Combinaisons $n-1$ à $n-1$ des $m-1$ autres lettres. Écrivons séparément la liste de ces combinaisons, contenant a; faisons aussi la liste des combinaisons contenant b, et ainsi de suite. L'ensemble de ces m listes, présente $mC_{m-1,n-1}$ combinaisons. Mais le nombre de ces combinaisons est aussi exprimé par $nC_{m,n}$; car dans l'ensemble formé, chacune des $C_{m,n}$ combinaisons des m lettres n à n se trouve répétée n fois, puisqu'elle se trouve écrite dans la liste correspondante à chacune de ses n lettres. On a donc

$$mC_{m-1,n-1}=nC_{m,n},$$

d'où

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}C_{m-1,n-1}=\frac{m(m-1)}{n(n-1)}C_{m-2,n-2}=\ldots$$
$$=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n(n-1)\ldots\ldots 1},$$

à cause de

$$C_{m-n+1,1}=\frac{m-n+1}{1}.$$

Troisième méthode. Chacune des $C_{m,n}$ combinaisons des m lettres n à n contenant n lettres, leur ensemble en contient $nC_{m,n}$. La $m^{\text{ème}}$ partie de ce nombre, c'est-à-dire $\frac{n}{m}C_{m,n}$ exprime combien de fois se trouve écrite une même lettre a. Mais ce nombre de fois est aussi exprimé par

$$C_{m-1,n-1}.$$

En effet, pour obtenir toutes les combinaisons n à n renfermant a, il faut d'abord former toutes les combinaisons des $m-1$ autres lettres $n-1$ à $n-1$, puis écrire la lettre a dans chacune de ces combinaisons, c'est-à-dire $C_{m-1,n-1}$ fois. On a donc :

$$\frac{n}{m} C_{m,n} = C_{m-1,n-1}$$

d'où

$$C_{m,n} = \frac{m}{n} C_{m-1,n-1}$$

comme par la deuxième méthode.

Cette troisième méthode est remarquable en ce qu'elle conduit également à l'expression du nombre $C_{m,n}$, lorsqu'il s'agit de combinaisons avec répétitions de lettres. Alors la formule $\frac{n}{m} C_{m,n}$ exprime encore combien de fois une lettre a se trouve écrite ; mais ce nombre de fois est aussi exprimé par

$$C_{m,n-1} + \frac{n-1}{m} C_{m,n-1}.$$

En effet, pour obtenir toutes les combinaisons n à n avec répétitions où se trouve a, il faut d'abord former les $C_{m,n-1}$, combinaisons des m lettres $n-1$ à $n-1$, combinaisons dans lesquelles cette lettre se trouve déjà écrite $\frac{n-1}{m} C_{m,n-1}$ fois, puisqu'elles renferment $(n-1)\, C_{m,n-1}$ lettres ; ensuite il faut encore écrire la lettre a une fois dans chacune de ces combinaisons $n-1$ à $n-1$, c'est-à-dire $C_{m,n-1}$ fois. On a donc

$$\frac{n}{m} C_{m,n} = C_{m,n-1} + \frac{n-1}{m} C_{m,n-1} = \frac{m+n-1}{m} C_{m,n-1},$$

formule dont il est facile de déduire

$$C_{m,n} = \frac{m\,(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}.$$