NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MIDY

Équations polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 597-606

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__597_0>

ÉQUATIONS POLAIRES.

PAR M. MIDY,
ancien professeur dans les Colléges royaux.

I. *Discussion de la droite*,

Dans la plupart des traités de géométrie analytique, on ne discute guère d'autres équations polaires que celles des trois courbes du second degré, ramenées à leurs formes les plus simples. Encore ne donne-t-on pas en général le moyen de construire ces courbes en partant de ces mêmes équations. Cependant les élèves, dans les examens, ont fréquemment à discuter des courbes polaires d'espèces différentes. Nous croyons donc faire une chose utile en montrant, par quelques exemples choisis, comment il est souvent possible de déduire d'une équation polaire donnée non-seulement la construction géométrique de la courbe qu'elle représente, mais encore la détermination précise de ses tangentes, de ses asymptotes, et même de ses points d'inflexion lorsqu'elle doit en avoir.

Dans ce qui suit, nous supposerons connues les méthodes au moyen desquelles on détermine pour chaque point d'une courbe polaire la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente en ce point avec le rayon vecteur et la valeur linéaire de la sous-tangente correspondante. Nous désignerons, pour abréger, la première de ces deux grandeurs par la caractéristique *tg*, et la seconde par *st*; et comme l'équation polaire de la ligne droite, considérée sous ses différentes formes, nous sera utile par la suite, c'est par elle que nous commencerons ces discussions.

Soit d'abord l'équation polaire :

$$\rho = \frac{1}{\sin\omega + \cos\omega}, \qquad (1)$$

indiquée dans les *Annales* (tome III, page 608), et qui est celle d'une droite rencontrant les axes rectangulaires OX et OY (*fig.* 56), en A et en B à une distance 1 de l'origine, et par suite parallèle à la bissectrice DE de l'angle YOX'.

La discussion directe de l'équation (1) ne conduirait pas immédiatement à cette conséquence. Voyons toutefois par quelle suite de considérations elle pourrait nous y faire arriver.

Les hypothèses $\omega = 0°$ et $\omega = 90°$ donnant l'une et l'autre $\rho = 1$, on voit de suite que la ligne cherchée coupe les droites rectangulaires OX et OY en A et en B. Puis, pour toutes les valeurs de ω comprises entre les deux précédentes, la somme $\sin\omega + \cos\omega$ est > 1, et il est facile de s'assurer que sa valeur maximum correspond à $\omega = 45°$.

Par suite, entre ces deux limites, ρ est <1 et sa valeur minimum, égale à $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ est la perpendiculaire OC abaissée du point O sur la droite AB. Il est donc reconnu déjà que celle-ci a trois points communs H, C, B avec la ligne cherchée.

D'ailleurs, en faisant varier ω de $90°$ à $90°+45°$, ou de $0°$ à $-45°$, la valeur de ρ tend également vers l'infini; au delà de ces limites les valeurs de ρ deviennent négatives, mais leurs valeurs absolues sont égales aux precédentes, d'où il suit que celles-ci suffisent pour déterminer tous les points de la ligne.

Quoique ces premiers résultats indiquent déjà une sorte de contiguïte entre la droite indéfinie NABN' et la ligne cherchée, on ne peut néanmoins en conclure encore l'identité des deux lignes. Considérons donc la ligne (1) comme une courbe, et nous allons, pour la caractériser davantage, calculer les quantités que nous sommes convenus précédemment de désigner par tg et st.

De l'équation (1) on déduit :

$$\rho + k = \frac{1}{\sin(\omega + h) + \cos(\omega + h)},$$

d'où

$$k = -\frac{(\sin(\omega + h) - \sin\omega) - (\cos\omega - \cos(\omega + h))}{(\sin(\omega + h) + \cos(\omega + h))\ (\sin\omega + \cos\omega)};$$

par suite

$$\frac{h}{k} = = \frac{(\sin(\omega + h) + \cos(\omega + h)\,.\,(\sin\omega + \cos\omega)}{\cos\left(\omega + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(\omega = \frac{h}{2}\right)} \times \frac{\frac{1}{2}h}{\sin\frac{1}{2}h},$$

donc

$$\lim.\ \frac{h}{k} = -\frac{(\sin\omega + \cos\omega)^2}{\cos\omega - \sin\omega};$$

d'où il suit que

$$tg = -\frac{\sin\omega + \cos\omega}{\cos\omega - \sin\omega} \text{ et } st = -\frac{1}{\cos\omega - \sin\omega}.$$

Voyons les conséquences de ces deux formules. Pour $\omega = 0$, elles donnent $tg = \ 1$ et $st = -1$. D'ailleurs $\rho = 1$. Donc, pour le point A de la ligne (1) la sous-tangente est OB, et la tangente, qui est par suite l'indéfini BA, fait avec le rayon vecteur OA dans le sens AN un angle OAN dont la tangente est -1. D'où il suit que la tangente de son supplément OAN′ est $+1$, ce qui d'ailleurs est évident puisque le triangle rectangle OAB est isocèle.

On prouverait de même que, pour le point B, la sous-tangente est OA, et que par conséquent la tangente est AB.

Pour $\omega = 45^\circ$, $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $st = \infty$. Donc la tangente au point C est parallèle à DE.

D'ailleurs si l'on fait $\omega = 90° + 45°$, ou bien $\omega = -45°$, l'on a également $\rho = \infty$ et $st = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dans le premier cas, et $st = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dans le second cas. Donc la droite AB, déjà tangente en A, en C et en B, à la ligne (1) est en outre, tant dans le sens CN que dans le sens contraire CN', une asymptote de cette ligne.

Il est donc reconnu que la ligne (1), qui suit l'indéfini AB dans toute son étendue, la touche dans ses points les plus remarquables. Pour vérifier enfin si cette ligne ne serait pas la droite AB elle-même, cherchons quelle serait la distance de chacun de ses points à la droite DE, parallèle à AB, ou ce qui est l'équivalent, déterminons quelle serait pour chaque valeur de ω, la projection de ρ sur la perpendiculaire OC à ces droites.

Nommons φ l'angle formé avec OX par la droite OC. Pour une position quelconque du rayon vecteur, nous aurons :

$$\cos(\omega - \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.\cos\omega + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos\omega + \sin\omega);$$

d'ailleurs

$$\rho = \frac{1}{\cos\omega - \sin\omega},$$

donc

$$\rho\cos(\omega - \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \text{OC}.$$

Ainsi la projection de ρ sur OC est constante. Donc enfin la ligne (1) n'est autre que AB.

On voit, par la discussion précédente, combien il importe d'avoir une équation polaire de la ligne droite assez caractérisée pour que, dans aucun cas, on ne puisse la confondre avec celle d'une autre ligne.

Pour la trouver, prenons sur les axes rectangulaires

OX, OY (*fig.* 57), OA$=a$, OB$=b$ et menons AB; l'équation de cette droite sera

$$ay+bx=ab;$$

par suite son équation polaire sera

$$a\,.\,\rho\sin\omega+b\,.\,\rho\cos\omega=ab,$$

d'où

$$\rho=\frac{ab}{a\sin\omega+b\cos\omega}, \qquad (2)$$

équation qui devient identique avec

$$\rho=\frac{1}{\sin\omega+\cos\omega}$$

quand on fait $a=1$ et $b=1$.

Quand on fait b infini l'équation (2) se change en

$$\rho=\frac{a}{\cos\omega};$$

c'est l'équation polaire d'une droite perpendiculaire à OX, ou à l'axe polaire, menée à une distance a du pôle.

De même

$$\rho=\frac{b}{\sin\omega}$$

est une parallèle à cette même droite menée à la distance b.

En appelant α l'angle BAO et p la perpendiculaire OC sur AB, l'équation (2) deviendra :

$$\rho=\frac{p}{\sin\omega\cos\alpha+\cos\omega\sin\alpha},$$

ou

$$\rho=\frac{p}{\sin(\omega+\alpha)}, \qquad (4)$$

et c'est la forme sous laquelle on la met ordinairement.

La figure (57) montre en effet que cette équation écrite comme il suit :

$$\rho \sin(\omega + \alpha) = p,$$

exprime que la projection de tous les rayons vecteurs, tels que ON sur OC, est constante et égale à p, ou que la ligne AB est droite.

En renversant le calcul qui précède, on reviendrait aisément de l'équation (4) à l'équation (2) qui l'a produite.

Il est facile de voir que l'équation particulière

$$\rho = \frac{1}{3 \sin \omega - 2 \cos \omega}, \qquad (5)$$

indiquée également dans les Annales (tome III, page 608), rentre dans la forme générale :

$$\rho = \frac{ab}{a \sin \omega + b \cos \omega}.$$

Elle est celle d'une droite coupant l'axe polaire en A (*fig.* 58) à la distance $-\frac{1}{2}$ du pôle et la perpendiculaire OY sur cet axe à la distance $OB = \frac{1}{3}$.

On peut d'ailleurs identifier cette équation avec l'équation

$$\rho = \frac{p}{\sin \omega \cos \alpha + \cos \omega \sin \alpha}, \qquad (6)$$

en posant l'équation

$$\sin \omega \cos \alpha + \cos \omega \sin \alpha = p\,(3 \sin \omega - 2 \cos \omega),$$

ou

$$\sin \omega\,(\cos \alpha - 3p) + \cos \omega\,(\sin \alpha + 2p) = 0\,;$$

et comme celle-ci doit être satisfaite quel que soit ω, il faut qu'on ait séparément :

$$\cos \alpha - 3p = 0\,,$$
$$\sin \alpha + 2p = 0\,,$$

ou bien

$$\cos\alpha = 3p,$$
$$\sin\alpha = -2p.$$

Élevant au carré et ajoutant, l'on a :

$$1 = 13p^2,$$

d'où

$$p = \pm\frac{1}{13}\sqrt{13};$$

par suite

$$\cos\alpha = \pm\frac{3}{13}\sqrt{13} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \mp\frac{2}{13}\sqrt{13};$$

substituant ces valeurs dans (6) l'on retombe sur l'équation primitive

$$\rho = \frac{1}{3\sin\omega - 2\cos\omega}.$$

II. *Courbe polaire.*

Considérons maintenant l'équation polaire

$$\rho = \frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega}.$$

(*Fig.* 59.) Soient O le pôle et OX l'axe polaire. Décrivons du centre O et du rayon OA=1 la circonférence ABA'B'. Faisons croître ω depuis 0° jusqu'à 90° : ρ, qui sera positif, croîtra depuis 1 jusqu'à ∞ ; ce qui donnera l'arc AV. De 90° à 180° les valeurs de ρ seront encore positives et en ordre inverse égales aux précédentes ; ce qui donne l'arc V'A'. De 180° à 270° les valeurs de ρ décroîtront de 1 à 0; ce qui donnera l'arc A'N'''O. Enfin de 270° à 360° les valeurs de ρ égales aux précédentes, croîtront de 0 à 1 ; ce qui donnera l'arc ON''A.

Voyons comment on déterminera le point N de la courbe correspondant à une position donnée ON du rayon vecteur. La perpendiculaire MP sur OX étant la valeur correspondante de sin ω, on fera MP′ = MP″ = MP : puis menant P″Q parallèle à P′A, l'on aura par cette construction :

$$OQ = \frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega} = \rho.$$

Rabattant du centre O le point Q en N sur la direction ON, le point N ainsi construit sera le point cherché. Si l'on prend l'arc AM′=AM, il sera facile de déduire de la position connue du point N, situé sur le rayon ON, celle du point N″ sur ON′ : car les rayons vecteurs correspondants seront liés par la relation

$$\rho'\rho'' = 1.$$

Donc si l'on détermine sur la tangente en A au cercle OA un point C également distant de A et de N, la circonférence CA coupera la direction OM en un point N′ qui rabattu en N″ donnera la position du second point cherché.

Il sera donc facile de déterminer tant au-dessus qu'au dessous de l'axe polaire autant de points de la courbe que l'on voudra. Cherchons maintenant les valeurs de *tg* et *st*.

D'abord

$$\rho + k = \frac{1+\sin(\omega+h)}{1-\sin(\omega+h)};$$

par suite

$$k = \frac{2\left(\sin(\omega+h)-\sin\omega\right)}{\left(1-\sin(\omega+h)\right)(1-\sin\omega)} = \frac{4\cos\left(\omega+\frac{1}{2}h\right)\sin\frac{1}{2}h}{\left(1-\sin(\omega+h)\right)(1-\sin\omega)},$$

d'où

$$\frac{h}{k} = \frac{\left(1-\sin(\omega+h)\right)(1-\sin\omega)}{2\cos\left(\omega+\frac{1}{2}h\right)} \times \frac{\frac{1}{2}h}{\sin\frac{1}{2}h};$$

l'on aura donc :

$$\lim.\frac{h}{k}=\frac{(1-\sin\omega)^2}{2\cos\omega},$$

d'où l'on déduira

$$tg=\frac{1}{2}\cos\omega \text{ et } st=\frac{(1+\sin\omega)^2}{2\cos\omega},$$

ou encore $st=\frac{1}{2}\rho\cos\omega$.

De cette dernière expression il résulte, que la sous-tangente en un point quelconque de la courbe est égale à la demi-projection du rayon vecteur correspondant sur l'axe polaire. Ainsi projetant le point N en n sur OX et prenant sur la perpendiculaire en O à ON, $OS=\frac{1}{2}On$, la droite SN sera tangente en N à la courbe considérée. Il résulte des mêmes formules qu'au point O la perpendiculaire OY sur OX est tangente aux deux branches de la courbe : qu'aux points A et A′ la sous-tangente OL, est égale à $\frac{1}{2}$OA : que l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente croît depuis le point O, où il est nul, jusqu'au point A où il a atteint sa valeur maximum · que de A en V il décroît sans cesse pour devenir nul à l'infini ; c'est-à-dire, quand la tangente, devenue parallèle à OY, est située à une distance infinie de cette droite.

Proposons-nous enfin en dernier lieu de trouver sur la partie ON″A le point le plus bas. C'est évidemment celui où la tangente est parallèle à OX et où par conséquent l'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur est égal à celui que ce dernier fait lui-même avec l'axe. Il sera donc déterminé par la relation

$$\frac{1}{2}\cos\omega=\tang\omega,$$

qui conduit à

$$\tang^4 \omega + \tang^2 \omega - \frac{1}{4} = 0;$$

d'où

$$\tang^2 \omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

ou, rejetant le signe inférieur,

$$\tang^2 \omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Pour avoir la position correspondante du rayon vecteur nous ferons la construction suivante. Rabattant E'G en E'H' sur le côté E'B' du carré construit sur OA et projetant H' en H", la moitié AI de la corde AK sera la valeur de tang ω. Faisant AT" = AT' = AI, le point N', conjugué du point N, rabattu en N" sur AT', sera la position du point le plus bas cherché et la courbe aura la forme VNAN"ON'''A'V' indiquée par la figure.