Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Question d'examen sur les cordes des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 590-596

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__590_1>

QUESTION D'EXAMEN

sur les cordes des coniques.

(V. p. 520.)

Question. *Quel est le lieu géométrique du milieu d'une corde de grandeur constante, inscrite dans une conique?*

I. *Considérations générales.* Une corde de longueur constante étant inscrite dans une conique, l'enveloppe est une ligne du quatrième degré. On trouve le point de contact de chaque corde avec l'enveloppe, en projetant sur cette corde le point d'intersection des deux normales menées à la courbe donnée, par les deux extrémités de la corde ; ce même point d'intersection, joint à un point quelconque de la corde, donne la direction de la normale à la courbe que décrit ce point pendant le mouvement de la corde (t. II, p. 289 et t. III, p. 187). On sait donc, à chaque position de la corde, mener une tangente par le point milieu à la courbe décrite par ce point milieu.

II. *Expression analytique de la longueur d'une corde inscrite dans une conique.*

Soit l'équation à six termes d'une conique; axes rectangulaires ; et $dy + ex + f = 0$ (1) l'équation d'une sécante ; les équations donnant respectivement les deux abscisses, et les deux ordonnées des deux points d'intersection de la droite et de la conique, sont (*voir* t. II, p. 108) :

$$Rx^2+Sx^2+T=0\ (3);\ Ry^2+S'y+T'=0\ (4);\ R=Ae^2-Bde+Cd^2;$$
$$S=2Aef-Bdf-Dde+Ed^2;\ T=Af^2-Ddf+Fd^2.$$

On trouve T′ et S′ en changeant d en e, A en C, D en E, et *vice versâ*. Le carré de la différence des racines dans l'équation (3) est $\dfrac{S^2-4RT}{R^2}$, et dans l'équation (4), $\dfrac{S'^2-4RT'}{R^2}$.

Désignant par p la longueur de la corde interceptée, on a donc ·

$$p^2 = \frac{S^2-4RT+S'^2-4RT'}{R^4} = \frac{V}{R^2}(d^2+e^2) \qquad (4)$$

$$V = l'd^2 - 2den + le^2 + mf^2 + 2fdk' + 2fek.$$

Faisant $e = dr$, $f = ds$, l'équation (1) prend la forme

$$y + rx + s = 0; \qquad (5)$$

et l'équation (4) devient :

$$p^2 = \frac{(1+r^2)(l'-2rn+lr^2+ms^2+2k's+2krs)}{(Ar^2-Br+C)^2}. \quad (6)$$

III. Théorème. Le lieu géométrique du milieu d'une corde de longueur constante inscrite dans une conique à centre, est une ligne du quatrième degré concentrique à la conique.

Démonstration. Prenons pour axes, les deux diamètres principaux, l'équation de la conique est :

$$Ay^2 + Cx^2 + F = 0; \quad k = k' = n = 0; \quad l = -4AF;$$
$$l' = -4CF; \quad m = -4AC.$$

Conservons les mêmes données que dans le paragraphe précédent, l'équation (6) devient :

$$p^2(Ar^2+C)^2 = -4(1+r^2)[F(Ar^2+C)+ACs^2]. \quad (7)$$

Désignant par x' et y' les coordonnées du point milieu de la corde, on a :

$$x' = -\frac{S}{2R} = -\frac{Ars}{Ar^2+C}; \quad y' = -\frac{S'}{2R} = -\frac{Cs}{Ar^2+C}, \quad (8)$$

et l'on a aussi $y'+rx'+s=0$; mais deux de ces trois équations impliquent la troisième ; y' et x' étant les coordonnées courantes du point milieu, nous supprimons les accents, et pour avoir le lieu cherché, nous éliminons r et s entre les équations (5), (7) et (8); éliminant d'abord s entre les équations (5) et (8), il vient après avoir divisé par r,

$$Ary - Cx = 0; \quad \text{d'où} \quad r = \frac{Cx}{Ay}; \quad s = -\frac{Ay^2+Cx^2}{Ay};$$

portant ces valeurs dans l'équation (7), on obtient, après avoir ôté le facteur Ay^2+Cx^2 :

$$4(A^2y^2+C^2x^2)(Ay^2+Cx^2+F)+ACp^2(Ay^2+Cx^2)=0. \quad (9)$$

Telle est l'équation du lieu cherché, courbe du quatrième degré, concentrique à la conique donnée; ce qui était évident *à priori*. $x=y=0$ satisfont à l'équation; donc l'origine est sur la courbe ou est conjuguée à la courbe. Lorsque $c=0$, l'équation se réduit à $Ay^2+Cx^2+F=0$, c'est-à-dire à la conique donnée; ce qui est encore évident.

DISCUSSION.

IV. *Ellipse* Soit a le demi-grand axe et b le demi-petit axe; l'équation (9) peut se mettre sous la forme :

$$\left.\begin{array}{l}4a^6y^4+4a^2b^2x^2y^2(a^2+b^2)+4b^6x^4+\\ +a^4b^2y^2(p^2-4a^2)+a^2b^4x^2(p^2-4b^2)=0\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Résolvant, il vient :

$$8a^4y^2=-b^2\left[4(a^2+b^2)x^2+a^2(p^2-4b^2)\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{16(a^2-b^2)^2x^4-8a^2(a^2-b^2)(p^2+4a^2)x^2+a^4(p^2-4a)^2}\right],$$

ou bien ·

$$8a^4y^2=-b^2\left\{4(a^2+b^2)x^2+a^2(p^2-4a^2)\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{[4x^2(a^2-b^2)-a^2(p+2a)^2][4x^2(a^2-b^2)-a^2(p-2a)^2]}\right\},$$

équation qui rend facile la construction de la courbe, lors même que la conique n'est pas tracée.

1° Si p est superieur ou égal à $2a$, l'équation n'est possible que pour les valeurs réelles $x=y=0$; donc la courbe se réduit à son centre.

2° $p<2a$ et $>2b$; la courbe est un *huit de chiffre* passant par le centre; la tangente parallèle au grand axe a pour équation $y=\dfrac{b}{2a}\sqrt{4a^2-p^2}$.

Désignant le coefficient angulaire de la tangente (coefficient différentiel) par y', on a ·

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}\cdot\frac{8b^4x^2+4a^2y^2(a^2+b^2)+a^2b^2(p^2-4b^2)}{8a^4y^2+4b^2x^2(a^2+b^2)+a^2b^2(p^2-4a^2)}.$$

ou bien, prenant la dérivée sur l'équation résolue, on trouve :

$$4a^4yy' = (a^2 - b^2)x\frac{[8x^2(a^2-b^2) - 2a^2(p^2+4a^2)]}{\sqrt{X}};$$

où X est la fonction de x qui est sous le radical, dans la valeur de y^2; y' devient nul en faisant $x=0$, et $x^2 = \frac{a^2(p^2+4a^2)}{4(a^2-b^2)}$; mais cette seconde valeur rend y^2 imaginaire ; y' devient infini lorsque $X = 0$; ce qui donne :

$$x^2 = \frac{a^2(p+2a)^2}{4(a^2-b^2)} \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{a^2(p-2a)^2}{4(a^2-b^2)}.$$

La première valeur rend y^2 négatif, la deuxième valeur donne $y^2 = \frac{1}{4}\frac{b^2}{a} \cdot \frac{2a-p \, . \, pa - 2b^2}{a^2-b^2}$; le second membre est positif; on connaît donc la position des deux tangentes parallèles à l'axe des y.

Le système des deux diamètres égaux chacun à p est donné par l'équation $a^2(p^2-4b^2)y^2 - b^2(4a^2-p^2)x^2 = 0$.

3° $p < 2a$; $p = 2b$; le système des diamètres égaux se réduit au petit axe.

4° $p < 2a$; $p < 2b$; le système des diamètres égaux disparait ; la courbe n'a plus de points multiples au centre, qui devient un point isolé et conjugué ; la forme est ellipsoïdale et elle est inscrite dans le rectangle formé par les tangentes parallèles aux axes ; les équations de ces tangentes sont :

$$x = \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2-p^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-p^2}.$$

5° Si $a = b$, l'équation (10) devient :

$$(y^2 + x^2)[4(y^2+x^2) + p^2 - 4a^2] = 0,$$

qui représente un point conjugué et un cercle, ainsi que l'enseigne la géométrie élémentaire.

V. *Hyperbole*. Prenant $2a$ pour l'axe focal, l'équation du lieu cherché est :

$$\left.\begin{array}{l} 4a^6y^4 - 4a^2b^2x^2y^2(a^2-b^2) - 4b^6x^4 - \\ - a^4b^2y^2(p^2-4a^2) + a^2b^4x^2(p^2+4b^2) = 0 \end{array}\right\}. \qquad (11)$$

Les termes du quatrième degré sont :

$$4(a^4y^2 + b^4x^2)(a^2y^2 - b^2x^2).$$

Ainsi la courbe formée par les cordes intérieures a les mêmes asymptotes que l'hyperbole, ou plutôt l'hyperbole est une asymptote curviligne à la courbe du quatrième degré ; ce qu'on peut voir *à priori*, puisqu'à l'infini l'hyperbole se confond avec ses asymptotes. Lorsque p est égal ou inférieur à l'axe focal, il n'y a point de courbe à l'extérieur, et le centre est un point conjugué ; mais lorsque p est plus grand que l'axe focal, il existe une courbe correspondante aux cordes extérieures, ayant une forme lemniscoïde, et la détermination des tangentes limites a lieu comme ci-dessus.

1° Il est facile de voir, par la comparaison des équations, que la courbe du quatrième degré, soit pour l'ellipse, soit pour l'hyperbole, ne peut devenir ni une cassinoïde ni une lemniscate.

2° Si $a = b$, l'équation (11) devient :

$$4(y^4 - x^4) + p^2(x^2 - y^2) + 4a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

3° Faisant $b = ah$, l'équation de l'hyperbole est :

$$y^2 - h^2x^2 = -b^2,$$

et l'équation (11) devient :

$$4y^4 + 4h^2x^2y^2(h^2-1) - 4h^6x^4 - p^2h^2(y^2 - h^2x^2) + \\ + 4b^2(y^2 + 4h^4x^2 = 0.$$

Faisant $b = 0$, l'hyperbole se réduit à deux droites, et l'équation du lieu prend cette forme :

$$(y^2 - h^2x^2)(4y^2 + 4h^4x^2 - p^2h^2) = 0.$$

Le premier facteur représente le système des deux droites, et le second une ellipse rapportée à des diamètres conjugués ; ce qui s'accorde avec le théorème connu sur le lieu décrit par un point d'une droite d'une longueur constante, inscrite dans un angle rectiligne (*voir* p. 186).

VI. *Parabole.* Soit l'équation de cette courbe, axes rectangulaires, $Ay^2 + Ex = 0$; d'où

$$k = 2AE, \quad l' = E^2, \quad m = l = k' = n = 0.$$

L'équation (4) donne :

$$Ar^4p^2 = E(1 + r^2)(E + 4Ars). \qquad (12)$$

Désignant par x, y les coordonnées courantes du milieu de la corde, on trouve :

$$y = \frac{E}{2Ar}; \quad r = \frac{E}{2Ay}; \quad s = -y - rx = -\frac{2Ay^2 + Ex}{2Ay}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (12), on trouve pour équation du lieu cherché, après avoir fait $E = -2qA$,

$$4(y^2 + q^2)(y^2 - 2qx) + p^2q^2 = 0,$$

ligne qui a pour asymptote curviligne la parabole donnée, comme cela doit être.

Cette équation résolue donne :

$$2y^2 = q\left[2x - 4q \pm \sqrt{(2x - 4q + p)(2x - 4q - p)}\right].$$

VII. Les moyens de solution sont les mêmes, si l'on demandait, en général, à trouver le lieu géométrique d'un point dont les coordonnées sont respectivement des *fonctions symétriques* quelconques des coordonnées des extrémités de la corde ; car r est donné en fonction de s ; et les équations (3) et (4) fourniraient, par la théorie des fonctions symétriques, deux équations entre les coordonnées du point et la quantité s ; éliminant s, on aura le lieu cherché. Tm.