NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations d'identité et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 526-530

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__526_0>

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(V. p. 2 .)

—

LXI. *Théorème de Carnot sur les segments.*

THÉORÈME. Soit une ligne de degré m et un polygone de n côtés tracés dans le même plan ; A_1, A_2, A_3..., A_n désignant les sommets *consécutifs* du polygone. Considérant successivement A_1, A_2....A_n comme des points fixes, les sécantes A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4....A_nA_1 formeront chacune m segments, et en tout mn segments ; relativement aux points fixes A_n, A_{n-1}, A_{n-2}.... A_1, les sécantes A_nA_{n-1}, $A_{n-1}A_{n-2}$, $A_{n-2}A_{n-3}$.... A_2A_1, forment mn autres segments ; le produit des mn premiers segments est égal au produit des mn seconds segments.

DEMONSTRATION. Par un point quelconque O pris dans le plan de la ligne, menons n parallèles aux côtés A_1A_2, A_2A_3 .... A_nA_1 du polygone. Ces parallèles formeront chacune m segments, comptés du point O ; désignons par (1) le produit des segments formés par la parallèle à A_1A_2 ou A_2A_1 ; par (2) le produit des segments formés par la parallèle à A_2A_3 ou A_3A_2 et ainsi de suite ; représentons de même par 1,2 le produit des segments formés par la sécante A_1A_2, comptés du point A_1 et par 2,1 le produit des segments formés par la même sécante, mais comptés à partir de A_2 et ainsi des autres.

Le théorème de Newton donne (t. III, p. 510) :

$$\frac{1,2}{1,n}=\frac{(1)}{(n)}\,;\quad \frac{2,3}{2,1}=\frac{(2)}{(1)}\,;\quad \frac{3,4}{3,2}=\frac{(3)}{(2)}\,\cdots\cdots\,\frac{n,1}{n,n-1}=\frac{(n)}{(n-1)}\,;$$

multipliant ces équations ensemble, membre en membre, on obtient

$$1,2 \times 2,3 \times 3,4 \times \ldots n,1 = 1,n \times 1,1 \times 3,2 \times \ldots n,n-1 \text{ C.Q.F.D.}$$

Observation. Carnot énonce cette propriété seulement pour le triangle (*Géom. de position*, p. 289), mais il est évident que sa démonstration est applicable à un polygone quelconque; et l'on voit que ce théorème général est un corollaire immédiat du théorème de Newton. Les segments doivent toujours être pris dans les sens *analytique* (t. III, p. 512, *observ.* 1).

LXVII. Lemme. Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$; (1) l'équation d'une conique passant par quatre points dont les coordonnées sont connues; substituant dans cette équation successivement les valeurs données des coordonnées, on obtient quatre équations du premier degre; d'où l'on tire

$$\frac{B}{A} = Fp + q\,;\quad \frac{C}{A} = Fp' + q'\,;\quad \frac{D}{A} = Fp'' + q''\,;\quad \frac{E}{A} = Fp''' + q'''\,;$$

p, q, p', q' .. sont des fonctions algébriques connues des coordonnees des quatre points; ainsi l'équation (1) prend cette forme $\varphi(x,y) + F\psi(x,y) = 0$ (1), φ et ψ sont des fonctions du second degre à coefficients connus, soient encore deux autres coniques passant par les quatre mêmes points; elles auront pour équation

$$\varphi(x,y) + F'\psi(x,y) = 0\,;\ (2)\ \text{et}\ \varphi(x,y) + F''\psi(x,y) = 0\,;\ (3)$$

on peut toujours trouver deux nombres λ et λ' tels que $F'' = \lambda F + \lambda' F'$; $\lambda + \lambda' = 1$, donc $(3) = \lambda(1) + \lambda'(2) = 0$, ou bien $(1) + \mu(2) = (3)$, telle est la relation qui existe entre les trois équations de trois coniques passant par les quatre mêmes points.

LXVIII. *Involution de Desargues.*

Soient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0\,;$$
$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0\,;$$
$$A''y^2 + B''xy + C''x^2 + D''y + E''x + F'' = 0\,.$$

les équations de trois coniques passant par les quatre mêmes points.

On a donc, d'après le lemme précédent :

$$A'' = A + \mu A'; \quad B'' = B + \mu B'; \quad C'' = C + \mu C', \text{ etc.},$$

faisant $y = 0$ dans les trois équations, il vient :

$$Cx^2 + Ex + F = C(x - r)(x - s);$$
$$C'x^2 + E'x + F' = C'(x - r')(x - s');$$
$$C''x^2 + E''x + F'' = C''(x - r'')(x - s'');$$

d'où

$$Cr'' + Er'' + F + \mu(C'r''^2 + E'r'' + F') = 0,$$
$$Cs'' + Es'' + F + \mu(C's''^2 + E's'' + F') = 0,$$

éliminant μ et considérant que $Cr''^2 + Er'' + E = C(r'' - r)(r'' - s)$ et ainsi des autres trinômes, il vient

$$\frac{(r'' - r)(r'' - s)}{(s'' - r)(s'' - s)} = \frac{(r'' - r')(r'' - s')}{(s'' - r')(s'' - s')} \quad (1).$$

Soient A, A' les points d'intersection de la première conique avec l'axe des x ; B, B' de la seconde conique ; C, C' ceux de la troisième conique avec le même axe. L'équation (1) interprétée géométriquement donne

$$CA \,.\, CA' \,.\, C'B \,.\, C'B' = CB \,.\, CB' \,.\, C'A \,.\, C'A' \quad (2);$$

désignons A et A', B et B', C et C' sous les noms de premier, deuxième et troisième groupe de *points conjugués*. Alors l'équation (2) peut s'énoncer ainsi : le produit des distances de C aux points du premier groupe, par le produit des distances de C' aux points du deuxième groupe, est égal au produit des distances de C aux points du deuxième groupe par le produit des distances de C' aux points du premier groupe. Il est évident qu'on peut les grouper dans tel ordre qu'on veut, on a donc encore ces deux équations :

$$BA \,.\, BA' \,.\, B'C \,.\, B'C' = BC \,.\, BC' \,.\, B'A \,.\, B'A' \quad (2),$$
$$AB \,.\, AB' \,.\, A'C \,.\, A'C' = A'B \,.\, A'B' \,.\, AC \,.\, AC' \quad (3);$$

l'une de ces équations entre six points en enveloppe deux autres ; c'est ce qui a porté Desargues à dire que ces points sont *en involution*, et de là, le théorème suivant qui porte le nom de son inventeur :

Théorème de Desargues. Lorsque trois coniques passent par les quatre mêmes points, une sécante les coupe en six points qui sont *en involution*.

Observation I. Le théorème subsiste même lorsque des points deviennent imaginaires, et pourvu que l'on ait la relation :

$$(3) = (1) + \mu\,(2).$$

Observation II. En multipliant les équations (1), (2), (3), deux à deux, on en déduit ces quatre équations :

$$\begin{aligned}
AB' \,.\, BC' \,.\, CA' &= AC' \,.\, CB' \,.\, BA' \;(4),\\
AB' \,.\, BC \,.\, C'A' &= AC \,.\, C'B' \,.\, BA' \;(5),\\
AB \,.\, B'C' \,.\, CA' &= AC' \,.\, CB \,.\, B'A' \;(6),\\
AB \,.\, B'C \,.\, C'A' &= AC \,.\, C'B \,.\, B'A' \;(7),
\end{aligned}$$

qui expriment des relations entre trois segments.

Observation III. Si la sécante devient tangente à l'une des courbes, par exemple à la première conique : alors

$$CA = CA', \quad C'A = C'A', \quad AB = A'B, \quad AB' = A'B';$$

on obtient les sept équations relatives à l'involution des cinq points A,B,B',C,C'; le point A est dit *double*.

Observation IV. Si C' est à l'infini, l'équation (1) se réduit à

$$CA \,.\, CA' = CB \,.\, CB'.$$

Alors le produit des distances du point C aux points du groupe A,A' est égal au produit des distances du même point C aux points du groupe B,B'.

Observation V. On a l'identité :

$$C(x-r)(x-s) + \mu C'(x-r')(x-s') = C''(x-r'')(x-s'');$$

donc

$$Crs + \mu C'r's' = C''r''s'' = (C + \mu C')r''s'';$$

si l'origine O est telle que l'on ait $rs = r's'$, on aura aussi $rs = r''s''$; c'est ce point O que M. Chasles désigne sous le nom de *point central* des trois groupes en *involution*, et lorsqu'il existe un tel point, les six points sont en involution. (*Histoire des méthodes*, p. 312.)

Observation VI. Si le point O est tel que l'on ait $r+s = r'+s'$, on aura aussi $r+s = r''+s''$.

Observation VII. Il est facile d'étendre le théorème d'involution à trois lignes quelconques, passant par m points et déterminées complétement par $m^2 + 1$ points. On a $\frac{m(m-1)}{2}$ systèmes d'involution de $3m$ points.

Tm.