NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Question d'examen sur les racines des équations

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 518-520

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__518_1>

QUESTION D'EXAMEN

sur les racines des équations.

Problème. Trouver l'équation aux moyennes géométriques des racines de l'équation $x^4 + 2 = 0$.

Solution. Soient x', x'' deux racines de l'équation, et faisons $y=x'x''$; on a $x'^4+2=0$; $x''^4+2=0$. Éliminons x' et x''; il vient $x'=\frac{y}{x''}$; $y^4+2x''^4=0$. Il faut remplacer x'' par ses quatre valeurs; donc l'équation est $(y^4-4)^4=0$. Il en faut ôter les valeurs de y qui répondent à $x'=x''$, c'est-à-dire, l'équation aux carrés des racines de la proposée. Cette équation est $(y^2+2)^2$; donc l'équation cherchée est :

$$\frac{(y^4-4)^4}{(y^2+2)^2}=(y^2-2)^4(y^2+2)^2,$$

ou simplement ·

$$(y^2-2)^2(y^2+2)=0.$$

Telle est l'équation aux produits des racines prises deux à deux; faisant $y=z^2$, il vient $(z^4-2)^2(z^4+2)=0$. C'est l'équation cherchée.

Vérification. Les quatre racines sont :

$$x=\sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\sqrt{-1})\right]=a,$$

$$x=\sqrt[4]{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\sqrt{-1})\right]=b,$$

$$x=\sqrt[4]{2}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\sqrt{-1})\right]=c,$$

$$x=\sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\sqrt{-1})\right]=d.$$

$$ab=\sqrt{2};\quad ac=-\sqrt{-2};\quad ad=-\sqrt{2};$$

$$bc=-\sqrt{2};\quad bd=\sqrt{-2};\quad cd=\sqrt{2};$$

d'où

$$(y-\sqrt{2})^2(y+\sqrt{+2})^2(y+\sqrt{-2})(y-\sqrt{-2})=(y^2-2)^2(y^2+2)=0$$

comme ci-dessus.

Autrement. On a :

$$y^4-4=0;\quad \text{d'où}\quad y=\pm\sqrt{2}.$$

Soient x', x'', x''', x^{IV} les quatre racines; donc $x'x''x'''x^{\text{IV}}=2$. mais $x'x''=\sqrt{2}$; donc $x'''x^{\text{IV}}=\sqrt{2}$; il y a donc deux racines égales à $\sqrt{2}$, deux racines égales à $-\sqrt{2}$; l'équation complète est :

$$(y^4-4)(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})=(y^4-4)(y^2-2)=(y^2+2)(y^2-2)^2.$$