Nouvelles annales de mathématiques

Théorèmes de M. Steiner sur la division du plan par des droites et des cercles ; et sur la division de l'espace par des plans et des sphères

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 491-494

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__491_1>

THÉORÈMES DE M. STEINER

sur la division du plan par des droites et des cercles; et sur la division de l'espace par des plans et des sphères.

—

Théorème I. Un plan est partagé par n droites qui y sont situées *au plus* en $1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$ régions, dont $1 - n + \frac{n(n-1)}{2}$ sont entièrement fermées au plus, et $2n$ indéfinies.

Théorème II. Si on trace dans un plan n systèmes de a_1, a_2, a_3 .... a_n parallèles, chaque système ayant une direction différente, le plan sera partagé au plus en $1 + A + B$ régions; $A = a_1 + a_2 + \ldots a_n$; $B = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots a_{n-1} a_n$ dont $2A$ sont infinies et $1 - A + B$ fermées au plus.

Theorème III. Si on trace dans un plan n systèmes a_1, a_2 .... a_n de droites parallèles et b droites non parallèles, le plan sera partagé au plus en $1 + A + B + \frac{b(b-1)}{2}$ régions au plus, dont $2A$ sans bornes, A et B comme dessus.

Theorème IV. n circonférences partagent le plan au plus en $n(n-1) + 2$ régions, dont une seule est infinie.

Theorème V. Si on trace dans un plan n systèmes de c_1, c_2, c_3 .... c_n circonférences concentriques, chaque système ayant un centre différent; le plan sera partagé en $1 + 2B$ régions au plus, $B = c_1 c_2 + c_1 c_3 + \ldots c_{n-1} c_n$, dont une seule est sans bornes.

Theorème VI. Si on trace dans un plan n systèmes divers de a_1, a_2 .... a_n circonférences concentriques et b circonférences non concentriques, le plan sera partagé au plus en $2A + b(b-1) + 2$ régions, dont une seule est sans bornes.

Théorème VII. Si on trace dans un plan n systèmes de parallèles a_1, a_2 :... a_n et m systèmes de cercles concentriques c_1, c_2 .... c_m, le plan sera partagé au plus en $1 + A + B + 2AA' + 2B'$ régions; A et B se rapportent aux droites; A′ et B′ aux circonférences; 2B sont sans bornes, au plus.

Theorème VIII. Si on trace dans un plan n systèmes de parallèles a_1, a_2 .... a_n et b droites quelconques; m systèmes de circonférences concentriques, c_1, c_2, ... $c_3 c_m$, et d circonférences quelconques, le plan sera partagé au plus en $1+A+B+2AA'+2B'+\frac{b(b-1)}{2}+d(d-1$ régions, dont 2A sont au plus sans bornes.

Observation. Les théorèmes IV, V, VI s'appliquent également à la sphère.

Espace.

Théorème IX. n systèmes différents de plans parallèles; p_1, $p_2 \ldots\ldots p_n$ partagent l'espace au plus en $1+A+B+C$ régions; $A=p_1+p_2+\ldots p_n$; $B=p_1p_2\ldots\ldots+p_{n-1}p_n$; $C=p_1p_2p_3+\ldots\ldots$ $\ldots\ldots+p_{n-2}p_{n-1}p_n$; donc $2B+2$ sont complétement bornés. Et dont $-1+A-B+C$ sont complétement fermés et forment des corps.

Théorème X. n plans quelconques, dont trois ne sont pas parallèles à une même droite, et dont quatre ne passent pas par le même point, partagent l'espace au plus $1+n+\frac{n(n-1)}{2}+$ $+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ régions dont $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}$ sont complétement fermées.

Théorème XI. $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ systèmes de plans parallèles et m plans quelconques partagent l'espace au plus en $1+A+B+C+\frac{m(m+1)}{1.2}A+mB+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ régions, et dont $2+2B+2mA+m(m-1)$ ne sont pas complétement bornées; A, B, C comme ci-dessus.

Théorème XII. $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ systèmes divers de plans parallèles et $s_1, s_2 \ldots\ldots s_m$ systèmes de sphères concentriques partagent l'espace au plus en $1+A+B+C+2BA'+2B'A+2A'+2C'$; A, B, C se rapportent aux plans, et A', B', C' aux sphères; $2+2B$ régions sont incomplétement bornées.

Théorème XIII. n plans quelconques et m sphères quelconques partagent l'espace au plus en

$$1+n+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+mn(n-1)+mn(m-1)+2m+$$

$$+\frac{2m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\ \text{régions},$$

dont $2+n(n-1)$ sont incomplétement bornées.

Théorème XIV. $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ systèmes divers de plans parallèles et m plans quelconques, et s_1, s_2 .... s_q systèmes divers de systèmes concentriques et m' sphères quelconques partagent l'espace au plus en

$$1+A+B+C+2A'B+2B'A+2A'+2C'+$$

$$+\left(\frac{m(m+1)}{1.2}+m'(m'-1)+2mm'\right)A+(m+2m')\,A+$$

$$+2(m+m')\,AA'+(m+m')(m+m'-1)A'+2(m+m')B'+m+$$

$$+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+mm'(m+m'-2)+2m'+$$

$$+2\,\frac{m'(m'-1)(m'-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\ \text{régions},$$

dont $2+2B+2mA+m(m-1)$ sont incomplétement bornées.