NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHEVILLARD

Résolution des équations dont les racines ne sont que des fonctions algébriques de radicaux du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 467-474

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__467_1>

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

dont les racines ne sont que des fonctions algébriques de radicaux du second degré.

PAR M. CHEVILLARD,
professeur à Sorrèze.

Si les racines d'une équation algébrique ne sont formées que de radicaux du second degré, comme chacun de ceux-ci peut être tiré d'une équation du second degré à coefficients rationnels, l'équation proposée dont le degré sera nécessairement 2^m, pourra toujours être regardée comme provenant de l'élimination de $m-1$ inconnues entre m équations à coefficients rationnels du deuxième degré à deux inconnues, savoir :

$$
\begin{gathered}
t^2+at+b=0 \\
u^2+u(ct+d)+et^2+ft+g=0 \\
v^2+v(hu+i)+ju^2+ku+l=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^2+x(ny+p)+qy^2+ry+s=0,
\end{gathered}
$$

et par conséquent ses racines seront de la forme

$$x = A \pm \sqrt{B \pm \sqrt{C \pm \sqrt{D \pm \sqrt{E \pm \sqrt{F \pm \sqrt{G \pm \sqrt{H \pm}}}}}}}$$
$$\pm \sqrt{I \pm \sqrt{J \pm \sqrt{K \pm \sqrt{L \pm \sqrt{M \pm \sqrt{N \pm \sqrt{O \pm \sqrt{P \pm \ldots}}}}}}}},$$

Chaque nouveau radical portant sur une forme identique à tout ce qui le précède et A, B, C, etc., étant des quantités rationnelles. On trouve encore cette forme générale de la racine x, si l'on observe qu'une fonction algébrique de radicaux du deuxième degré, se ramène toujours définitivement à ne présenter ces radicaux que sous les formes d'addition, de soustraction, de superposition, les dénominateurs irrationnels pouvant être rendus commensurables. On peut même présenter sous la forme ci-dessus les racines de toute équation de degré 2^m, sauf à calculer par approximation les valeurs de A, B, C, etc., qui seront irrationnelles ; mais si la proposée n'a pour racines que des radicaux du second degré, on en sera averti en ce que ces valeurs seront toutes rationnelles. Soit, pour fixer les idées, proposée une équation quelconque du quatrième degré,

$$(1) \qquad x^4 + 4ax^3 + 2bx^2 + 4cx + d = 0,$$

dont les quatre racines peuvent s'écrire

$$x = A \pm \sqrt{B \pm \sqrt{C \pm \sqrt{D}}},$$

ou plutôt si l'on considère les deux équations dont on peut supposer que (1) est l'équation finale,

$$(2) \qquad x = m \pm l\sqrt{p} \pm \sqrt{n \pm \sqrt{p}}$$

où il n'entre en réalité que deux doubles signes, l'un de $\sqrt{p}$, l'autre de $\sqrt{n}$. Par une première élévation au carré, on trouve

$$x^2 - 2mx + m^2 + l^2p - n = \pm \sqrt{p}(1 - 2lm + 2lx),$$

et, par une deuxième élévation au carré, après réductions,

$$(3)\left\{\begin{array}{l} x^4-4mx^3+(3m^2-l^2p-n)2x^2+(l^2mp+mn-m^3-lp)4x+ \\ \qquad +(m^2+l^2p-n)^2-p(1-2lm)^2=0. \end{array}\right.$$

Telle est la forme sous laquelle peut être mise une équation du quatrième degré, les quatre constantes a, b, c, d, se trouvant remplacées par les quatre constantes l, m, n, p. Pour calculer ces dernières, on trouve en identifiant (1), et (3),

$$(4)\left\{\begin{array}{l} a=-m \\ b=3m^2-l^2p-n \\ c=l^2mp+mn-m^3-lp \\ d=(m^2+l^2p-n)^2-p(1-2lm)^2\,; \end{array}\right.$$

ce qui se réduit à

$$\begin{array}{l} l^2p+n=3a^2-b \\ lp=ab-2a^3-c \\ d=(ha^2-b-2n)^2-p\,(1+2al)^2\,; \end{array}$$

d'où l'on tire enfin

$$m=-a,\, p=\frac{ab-2a^3-c}{l},\ n=3a^2-b+l(c+2a^3-ab) \quad (5)$$

$$\begin{array}{l} 4l^3(c+2a^3-ab)^2+4l^2(c+2a^3-ab)(3a^2-b)+ \\ +l(12a^4-8a^2b+b^2+4ac-d)+c+2a^3-ab=0\,; \end{array}$$

équations qui montrent que la composition en radicaux du deuxième degré, des racines d'une équation du quatrième degré, réussira si l'on trouve une valeur commensurable de l. L'équation en l rappelle aussi que la résolution d'une équation du quatrième degré tient seulement à la résolution du troisième degré, car tous nos calculs sont généraux. Observons encore que l'équation en l ayant été obtenue sans solutions étrangères, les trois valeurs de l qu'elle fournit, doivent jouir de la propriété de donner par les substitutions dans (2), trois systèmes de valeurs identiques de x. Examinons maintenant quelques cas particuliers de la forme générale (2) :

1° $m=0$; $a=0$, $x=\pm l\sqrt{p}\pm\sqrt{n\pm\sqrt{p}}$, x^4+2bx^2+
$+4cx+d=0$, $4c^2l^3-4bcl^2+l(b^2-d)+c=0$,

$$p=-\frac{c}{l},\ n=-b+cl.$$

2° $$l=0;\ c+2a^3-ab=0,$$

relation nécessaire et suffisante pour que

$$x^4+4ax^3+2bx^2+4cx+d=0,$$

ait ses racines de la forme

$$x=m\pm\sqrt{n\pm\sqrt{p}}$$

connues par

$$m=-a,\ n=3a^2-b,\ p=\frac{0}{0}=(b-2a^2)^2-d.$$

3° $$n=0;m=-a,\ l=\frac{3a^2-b}{ab-2a^3-c},p=\frac{(ab-2a^3-c)^2}{3a^2-b};$$

remplaçant dans la dernière équation (4), on trouve

$$d(3a^2-b)=(4a^2-b)^2(3a^2-b)-(4a^3-ab-c)^2,$$

relation nécessaire et suffisante pour que

$$x^4+4ax^3+2bx^2+4cx+d=0,$$

ait pour racines

$$x=m\pm l\sqrt{p}\pm\sqrt{\pm\sqrt{p}}.$$

4° $p=0$; $m=-a$, $n=3a^2-b$, $l=0$, $c+2a^3-ab=0$,

$$d=(b-2a^2)^2,$$

deux relations pour que

$$x^4+4ax^3+2bx^2+4cx+d=0,$$

ait deux racines égales

$$x = m \pm \sqrt{n}.$$

Enfin une dizaine de cas sans intérêt, parmi lesquels je citerai seulement :

5° $$m = 0,\ l = 0,\ a = 0,\ c = 0,$$

seules conditions pour que

$$x^4 + 2bx^2 + d = 0$$

ait ses quatre racines.

$$x = \pm\sqrt{n \pm \sqrt{p}},\ n = -b,\ p = \frac{0}{0} = b^2 d.$$

C'est le seul cas des traités officiels d'algèbre.

6° $$m = 0,\ n = 0;\ a = 0,$$

d'où

$$bd = b^3 + c^2,$$

relation pour que

$$x^4 + 2bx^2 + 4cx + d = 0$$

ait la racine

$$x = \pm l\sqrt{p} \pm \sqrt{\pm\sqrt{p}};\ l = \frac{b}{c},\ p = -\frac{c^2}{b}.$$

7° $l = 0,\ n = 0;\ 3a^2 - b = 0,\ c + 2a^3 - ab = 0,\ x^4 + 4ax^3 + 2bx^2 + 4cx + d = 0,\ x = -m \pm \sqrt{\pm\sqrt{p}},\ m = -a,\ p = (b - 2a^2)^2 - d = a^4 - d.$

Application numérique.

Calculer s'il est possible les racines de

$$x^4 - 2x^2 - 16x + 1 = 0.$$

La forme de cette équation nous reporte au cas 1°. Cherchons donc si l'équation en l qui devient ici $64l^3 - 16l^2 - 4 = 0$, ou $16l^3 - 4l^2 - 1 = 0$, admet une racine commensurable.

Rendant les racines quatre fois plus grandes en posant $l=\frac{l_1}{4}$, on a la transformée $l_1^3-l_1^2-4=0$.

$l_1^3-l_1^2+0.l-4$
$2\ldots-1-1-2$

$l_1^2+l_1+2=0$

Cherchant les racines commensurables de cette équation par la méthode de division abrégée (*), on trouve la racine entière 2, et en même temps $l_1^2+l_1+2=0$ pour l'équation débarrassée de cette racine. On a donc aussi

$$(1^\circ)\ l=\frac{l_1}{4}=\frac{1}{2},\ p=-\frac{c}{l}=8,\ n=-b+cl=-1,$$

et par conséquent enfin

$$x=\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-1\pm2\sqrt{2}},$$

racines qui satisfont à la proposée, comme on peut le vérifier.

(*) Procédé que j'ai cité page 350 du 2me volume de ce journal, que M. Thibault a développé page 523 du même volume, et qui avait été présente dans le cours de mathématiques pures de M. Francœur dès la première édition. On trouve aussi dans ce dernier ouvrage un moyen très-commode de calculer les valeurs numériques que prennent les dérivées d'un polynome pour une valeur de x, ce qui est fort utile pour le calcul des transformées d'une proposée $X_x=0$. En y posant $x=y+h$, on a

$$(1)\qquad X_{y+h}=X_h+X'_h y+\frac{X''_h}{2}y^2+\frac{X'''_h}{2.3}y^3+\frac{X''''_h}{2.3.4}y^4+\ldots+\frac{X^m_h}{2.3\ldots m}y^m$$

et réciproquement en posant dans cette transformée $y=x-h$, on a l'identité

$$X_x=X_h+X'_h(x-h)+\frac{X''_h}{2}(x-h)^2+\frac{X'''_h}{2.3}(x-h)^3+\frac{X''''_h}{2.3.4}(x-h)^4+\ldots$$
$$+\frac{X^m_h}{2.3\ldots m}(x-h)^m;$$

maintenant si l'on divise X_x par $x-h$, ce qui donne Q, Q par $x-h$, d'où Q', Q' par $x-h$, d'où Q'', etc, on aura

$$Q=X'_h+\frac{X''_h}{2}(x-h)+\frac{X'''_h}{2.3}(x-h)^2+\frac{X''''_h}{2.3.4}(x-h)^3\ldots+\frac{X^m_h}{2.3..m}(x-h)^{m-1}$$
reste $=X_h$;

$$Q'=\frac{X''_h}{2}+\frac{X'''_h}{2.3}(x-h)+\frac{X''''_h}{2.3.4}(x-h)^2+\ldots+\frac{X^m_h}{2.3..m}(x-h)^{m-2}$$
reste $=X'_h$;

$$Q''=\frac{X'''_h}{2.3}+\frac{X''''_h}{2.3.4}(x-h)+\ldots+\frac{X^m_h}{2.3\ldots m}(x-h)^{m-3}$$

Les deux autres valeurs de l_1 tirées de

$$l_1^2+l_1+2=0$$

sont

$$l_1=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-7},$$

et partant

$$l=-\frac{1}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{-7},$$

donc,

$$l'=\frac{-1+\sqrt{-7}}{8},\ p'=-4\,(1+\sqrt{-7}),\ n'=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-7};$$

$$l''=\frac{-1-\sqrt{-7}}{8},\ p''=-4\,(1-\sqrt{-7}),\ n''=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-7};$$

---

reste $\qquad = \dfrac{X''_h}{2};$

. . . .

$$Q^{m-1} = \frac{X^m{}_h}{2.3..m}$$

reste $\qquad = \dfrac{X_h{}^{m-1}}{2.3\,..(m-1)}.$

En employant donc pour trouver ces quotients et leurs restes, la methode abrégée de division par $x-a$, on aura trés-simplement calculé les coefficients de la transformée (1).

Soit proposé par exemple, de calculer la transformée en $y=x-3$ de $X_x = 2x^4-7x^3-12x^2+4x+129=0$:

$2x^4$	$-7x^3$	$-12x^2$	$+4x$	$+129$			
2	—1	—15	—41	6			
2	5	0	—41				
2	11	33					
2	17				2	—7	—12
2					2	—1	—15
					2	5	0
					2	11	$33=\frac{X''_h}{2}$

Chaque ligne horizontale presente le quotient de la ligne (du polynôme) supérieure par $x-3$, et le dernier terme de chacune est successivement $X_h, X'_h, \frac{X''_h}{2}, \frac{X'''_h}{2.3}$, etc. de sorte que la transformée est

$$2y^4+17y^3+33y^2-41y+6=0.$$

Si l'on n'avait besoin que de la valeur d'une dérivée, par exemple de $\frac{X''_h}{2}$, il n'y aurait besoin que de calculer les trois premiers termes de chaque quotient. Enfin, s'il y avait nécessite comme dans la recherche des racines incommensurables, à calculer les transformées $X_{y+1}, X_{y+2}, X_{y+3},\ldots$ On voit que le procéde actuel fournira successivement les coefficients par de simples additions et soustractions.

et enfin

$$x' = \pm \frac{-1+\sqrt{-7}}{8}\sqrt{-4(1+\sqrt{-7})} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-7} \pm \sqrt{-4(1+\sqrt{-7})}}$$

$$x'' = \pm \frac{-1-\sqrt{-7}}{8}\sqrt{-4(1-\sqrt{-7})} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-7} \pm \sqrt{-4(1-\sqrt{-7})}}.$$

Ces valeurs satisfont nécessairement à la proposée d'après ce que j'ai dit plus haut sur la nature de l'équation en l. On le vérifie d'ailleurs en les substituant dans les équations (4), ce qui est d'un calcul plus simple que la substitution dans la proposée. On retrouve bien $a = 0$, $b = -1$, $c = -4$, $d = 1$.

Ces deux nouveaux systèmes de valeurs de x sont du reste identiques avec le système

$$x = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{-1 \pm 2\sqrt{2}}.$$

Comme le font retrouver des transformations de radicaux, d'après ce qui avait été prévu.