AUBIN-EMILE COULLARD-DESCOS

Grand concours (année 1845). Prix d'honneur

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 433-439

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__433_0>

GRAND CONCOURS (année 1845).

Etant donné un cercle, et un point dans son intérieur, on suppose que sur chacun des diamètres de ce cercle, on décrive une ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe, et qui passe par le point donné : On demande

1° *L'équation générale de ces ellipses.*

2° *Le lieu géométrique de leurs foyers.*

3° *Le lieu géométrique des extrémités de leurs petits axes.*

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. COULLARD-DESCOS (AUBIN-ÉMILE),
Né à Paris, le 28 février 1826.
(Élève externe du collége royal de Louis-le-Grand. — Classe de M. Richard.)

—

Je prendrai pour axe des x, une droite passant par le centre du cercle donné, et par le point donné M : pour axe des y, une perpendiculaire à cette droite menée par le centre. Soit a le rayon du cercle, et d la distance AM.

1° Je considère (*Fig.* 44), un diamètre quelconque BC, faisant avec l'axe des x un angle ω : soit BMC l'ellipse ayant le diamètre DE pour axe : si on la rapporte aux axes rectangulaires Ax', Ay', son équation sera de la forme

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Pour déterminer b, remarquons que cette courbe passe par le point M, dont les coordonnées par rapport aux axes Ax', Ay', sont AP et $-$MP ; ou en fonction de l'angle variable ω, $d\cos\omega$ et $-d\sin\omega$. Ainsi, nous aurons l'identité :

$$a^2d^2\sin^2\omega + b^2d^2\cos^2\omega = a^2b^2,$$

d'où

$$b^2 = \frac{a^2d^2\sin^2\omega}{a^2 - d^2\cos^2\omega}.$$

Remplaçant b^2 par sa valeur dans l'équation (1), nous aurons :

$$a^2y^2 + \frac{a^2d^2\sin^2\omega}{a^2-d^2\cos^2\omega}x^2 = \frac{a^4d^2\sin^2\omega}{a^2-d^2\cos^2\omega},$$

ou en supprimant a^2 de part et d'autre, et chassant les dénominateurs,

$$(2)\qquad (a^2 - d^2\cos^2\omega)y^2 + d^2\sin^2\omega.x^2 = a^2d^2\sin^2\omega.$$

Telle est l'équation d'une ellipse quelconque BMC, ayant pour axe un diamètre du cercle, faisant avec l'axe des x un angle ω, et passant par le point M : cette ellipse étant rapportée au diamètre Ax' pris pour axe des x, et au diamètre perpendiculaire Ay' pris pour axe des y : pour obtenir l'équation de la même courbe, rapportée aux axes primitifs, Ax, Ay, il suffira de remplacer x, y par

$$x\cos\omega + y\sin\omega,$$
$$-x\sin\omega + y\cos\omega;$$

ce qui donne toutes réductions faites,

$$(\mathrm{E})\ldots\ \left\{(a^2 - d^2)\cos^2\omega + d^2\sin^2\omega\right\}y^2 - 2(a^2 - d^2)\sin\omega\cos\omega.xy + \\ + a^2\sin^2\omega.x^2 - a^2d^2\sin^2\omega = 0.$$

On peut vérifier, ce qui est assez évident de soi-même, que l'axe dirigé suivant le diamètre Ax' est un grand axe : quand, comme on le suppose ici, le point M est intérieur au cercle. En effet, la demi-longueur de cet axe $= a$; celle de son conjugué,

$$= \frac{ad\sin\omega}{\sqrt{a^2 - d^2\cos^2\omega}} < \frac{ad\sin\omega}{\sqrt{d^2(1-\cos\omega)}} = \frac{ad\sin\omega}{a\sin\omega} = a.$$

2° **Cherchons maintenant le lieu géométrique des foyers : pour l'obtenir, considérons l'équation (2) ; en désignant par ρ la demi-excentricité de l'ellipse qu'elle représente, ou la distance du centre au foyer F, nous aurons évidemment :**

$$(3) \qquad \rho^2 = a^2 - \frac{a^2 d^2 \sin^2\omega}{a^2 - d^2\cos^2\omega} = \frac{a^4 - a^2 d^2 \cos^2\omega - a^2 d^2 \sin^2\omega}{a^2 - d^2\cos^2\omega} =$$

$$= \frac{a^2(a^2 - d^2)}{a^2 - d^2\cos^2\omega}.$$

Nous avons ainsi l'expression de ρ en fonction des quantités connues a et d, et de l'angle ω que fait avec l'axe des x la droite AF ; par conséquent on pourra regarder... (3) comme l'équation polaire du lieu des foyers : le pôle étant à l'origine, et l'axe polaire dirigé suivant l'axe des x.

Si l'on voulait avoir le lieu des points F', il suffirait de remplacer dans... (3) ω par $\omega - 180°$, ce qui n'altérera pas ρ, puisque le cosinus de l'angle variable n'y entre qu'au carré.

Pour reconnaître facilement ce que représente l'équation (3), repassons des coordonnées polaires, aux coordonnées rectilignes : ce passage peut ici s'effectuer très-simplement. En effet, chassons les dénominateurs, il viendra :

$$a^2\rho^2 - d^2\rho^2\cos^2\omega = a^2(a^2 - d^2,$$

ou bien

$$a^2(\rho^2\cos^2\omega + \rho^2\sin^2\omega) - d^2\rho^2\cos^2\omega = a^2(a^2 - d^2);$$

mais

$$\rho\cos\omega = x,\ \rho\sin\omega = y,$$

donc

$$a^2(x^2 + y^2) - d^2x^2 = a^2(a^2 - d^2);$$

ou bien

$$(\mathrm{F}) \qquad a^2y^2 + (a^2 - d^2)x^2 = a^2(a^2 - d^2,$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

L'axe dirigé suivant Ax, a pour longueur $2a$, et son conjugué a pour longueur $2\sqrt{a^2-d^2}$.

Ainsi, par le point donné M (fig. 45), j'élèverai une perpendiculaire à BC qui rencontrera la circonférence en H : par le point H, je mènerai une parallèle à BC, qui coupera Ay en D ; puis je prendrai le symétrique E de D par rapport au centre A : DE sera le petit axe ; car

$$DE = 2.AD = 2\sqrt{a^2-d^2}.$$

D'ailleurs le grand axe $=$ BC : connaissant les deux axes de l'ellipse donnée par l'équation (F), on pourra facilement la construire.

La figure AMHD est un rectangle; par conséquent DM $=$ AH $=$ AB : donc le point donné M, et son symétrique M', par rapport au centre sont les deux foyers de l'ellipse .. (F).

On pouvait parvenir à ces résultats par des considérations géométriques. Considérons une des ellipses en question (*Fig.* 45) : soit IK son grand axe ; soient F et F' ses deux foyers : nous aurons :

$$MF + MF' = 2a.$$

Mais les deux droites MM' et FF' se coupent mutuellement en deux parties égales : donc, les quatre points F, M, F', M', sont les sommets d'un parallélogramme ; par conséquent

$$MF' = FM' :$$

ainsi

$$MF + MF' = MF + M'F = 2a.$$

Donc le point F appartient à une ellipse ayant pour grand axe BC, et pour foyers les deux points M et M'.

3° Cherchons enfin le lieu géométrique des extrémités des petits axes : en nommant ρ la distance AD (*Fig.* 44), nous avons trouvé :

$$\rho^2 = \frac{a^2 d^2 \sin^2\omega}{a^2 - d^2\cos^2\omega};$$

pour avoir l'équation polaire du lieu cherché, il est clair qu'il suffit de changer ω en $\omega - 90°$; ce qui donnera :

$$\rho^2 = \frac{a^2 d^2 \cos^2\omega}{a^2 - d^2 \sin^2\omega},$$

ou en extrayant la racine carrée,

$$(\text{E}') \qquad \rho = \frac{ad \cos\omega}{\sqrt{a^2 - d^2 \sin^2\omega}}.$$

La courbe représentée par cette équation, est évidemment symétrique par rapport à l'axe polaire, et à une perpendiculaire menée par le pôle à l'axe polaire : de sorte que pour avoir la forme de la courbe, il suffira de faire croître ω depuis 0 jusqu'à 90 : si l'on fait $\omega = 0$, $\rho = d$: donc, le lieu passe par le point M : pour toutes les valeurs réelles de ω, le dénominateur ne sera jamais nul ; par conséquent, toutes les valeurs de ρ sont finies, et la courbe est limitée dans tous les sens. D'ailleurs pour $\omega = 90°$, $\rho = 0$; donc, la courbe passe par l'origine, et comme on peut regarder Ay comme la limite des positions d'une sécante variable, tournant autour de l'un de ses points d'intersection A avec la courbe, jusqu'à ce que l'autre vienne se confondre avec le premier, on peut affirmer que la courbe est tangente à l'axe des y ; ce qui donne l'arc de courbe AEM (*Fig.* 46). Il est facile maintenant de tracer la courbe entière. Elle n'a aucun point commun avec le cercle : c'est ce qu'il est très-facile de vérifier.

En cherchant la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la courbe fait avec le rayon vecteur du point de contact, on reconnaît que cette tangente devient infinie pour $\omega = 0$; en effet, on trouve en posant $\frac{d}{a} = e$:

$$\text{tang. } d = \frac{\cos\omega\,(1 - e^2 \sin^2\omega)}{\sin\omega\,(e^2 - 1)}.$$

Par conséquent la tangente en M est perpendiculaire à l'axe des x.

Si l'on supposait le point M sur la circonférence, il est clair alors que les ellipses qui satisferaient aux conditions du problème, ne seraient autre chose que le cercle donné : par conséquent, on devrait trouver pour lieu des extrémités des petits axes, le cercle lui-même. C'est en effet ce qui arrive : car la supposition de $d = a$, réduit... (E') à $\rho = a$.

Conservons les mêmes axes, et voyons ce que deviendraient les lieux dont nous venons de nous occuper, dans le cas où le point M serait extérieur au cercle. Alors d est $> a$. L'équation générale de toutes les ellipses ayant un diamètre du cercle pour axe, et passant par le point donné, est encore l'équation (E) : seulement, dans ce cas, $2a$ est le petit axe de chaque ellipse. C'est ce qu'on reconnaîtra par un calcul analogue au précédent.

Le lieu des foyers est une hyperbole (*Fig.* 47) dont l'axe transverse a pour longueur $2\sqrt{d^2 - a^2}$, et l'axe non transverse, $2a$. On reconnait encore que M et M' sont ses deux foyers. Par des considérations géométriques, on démontre facilement que le lieu des foyers a des branches infinies, et que le coefficient angulaire des asymptotes $= \frac{a}{\sqrt{d^2 - a^2}}$.

Le lieu des extrémités des petits axes est le cercle lui-même (*Fig.* 48) ; celui des extrémités des grands axes a pour équation :

$$\rho = \frac{ad\cos\omega}{\sqrt{a^2 - d^2\sin^2\omega}};$$

et comme $a < d$, ce lieu se compose de quatre branches infinies. Celles qui sont d'un même côté de l'axe des y se raccordent aux points M et M' ; et elles ont en ces points des tangentes perpendiculaires à l'axe des x. Les branches Mz et

$M'\nu'$ ont une asymptote commune qui passe par l'origine, et dont la direction est donnée par l'équation $\sin \omega = \frac{a}{d} : (\omega < 90°)$. Les deux autres branches ont aussi une asymptote commune qui passe par l'origine, et dont la direction est donnée par l'équation $\sin \omega = \frac{a}{d} : (\omega > 90°)$. Enfin, on peut remarquer que ce dernier lieu a un point conjugué qui est l'origine A : car pour des valeurs de ω peu différentes de 90°, ρ est imaginaire ; et $\omega = 90°$ donne $\rho = 0$.