Note sur les racines commensurables fractionnaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 397-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__397_1>

NOTE

sur les racines commensurables fractionnaires

—

Théorème. $\frac{\alpha}{\beta}$ étant une quantité *commensurable irréductible*, racine de l'équation

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots A_m = 0,$$

(*) Nous admettons encore ici que $\pm B = \int \pm dc$, c'est-à-dire que les courbes $Q = C$ ne peuvent être tangentes à mG. Il en résulterait en effet que $\theta - \omega$ pourrait être droit, ce qui est impossible

$A, A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$ sont des coefficients entiers, on aura les conditions suivantes :

$$A = \dot{\beta};\quad A_m = \dot{\alpha};\quad A\alpha + A = \dot{\beta};\quad A\alpha^2 + A_1\alpha\beta + A_2 = \dot{\beta}^2;$$
$$A\alpha^3 + A_1\alpha^2\beta + A_2\alpha + A_3 = \dot{\beta}^3 \ldots\ldots$$

et enfin :

$$A\alpha^m + A_1\alpha^{m-1}\beta + A_2\alpha^{m-2}\beta^2 + \ldots\ldots A_{m-1}\alpha\beta^{m-1} + A_m\beta^m = \dot{\beta}^m = \dot{0}.$$

Démonstration. La dernière équation est évidente, puisqu'elle exprime que $\frac{\alpha}{\beta}$ est racine. Tous les termes, le premier excepté, sont divisibles par β ; donc $A\alpha^m$ est aussi divisible par β ; mais α^m est premier avec β ; donc A est divisible par β ; ainsi $A = \dot{\beta}$. Le même genre de raisonnement fait voir que $A_m = \dot{\alpha}$. La somme des deux premiers termes doit être divisible par β ; divisant cette somme par α^{m-1}, le quotient $A\alpha + A_1$ est donc divisible par β. La somme des trois premiers termes doit être divisible par β^2 ; divisant cette somme par α^{m-2}, le quotient $A\alpha^2 + A_1\alpha\beta + A_2$ sera divisible par β^2, et ainsi de suite. C. Q. F. D.

Corollaire I. $\frac{A}{\beta}$ et $\frac{A_m}{\alpha}$ doivent être des nombres entiers ; et de même,

$$\frac{A\alpha}{\beta} + A_1,\quad \frac{A\alpha^2}{\beta^2} + A_1\frac{\alpha}{\beta} + A_2;\quad \frac{A\alpha^3}{\beta^3} + A_1\frac{\alpha^2}{\beta^2} + A_2\frac{\alpha}{\beta} + A_3;\ \ldots\ldots$$

La loi de déduction de ces quantités est évidente.

On a donc ces diverses conditions pour reconnaître si $\frac{\alpha}{\beta}$ est racine ; et si une seule manque, alors on est sûr que la quantité essayée n'est pas racine.

Corollaire II. Si $\beta = 1$, ces critériums deviennent illusoires ; alors, on cherche des critériums, en considérant a comme diviseur, et on tombe sur la méthode connue (*voir* t. II, p. 523). On sait d'ailleurs qu'on peut toujours ramener la recherche des racines commensurables fractionnaires à celle des racines commensurables entières.

Corollaire III. Le théorème subsiste lorsque α et β sont des expressions littérales n'ayant point de diviseur commun.

Observation. Le théorème peut se démontrer directement à l'aide du théorème de M. Gauss sur le produit de deux polynômes (t. III, p. 47); car le polynôme donné étant entier et divisible par $x-\frac{\alpha}{\beta}$ doit donner un quotient à coefficients entiers; mais ces divers coefficients sont :

$$\frac{A\alpha}{\beta}+A_1;\quad \frac{A\alpha^2}{\beta^2}+A_1\frac{\alpha}{\beta}+A_2;\ \ldots\ldots$$

donc, etc. Tm.