NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorèmes de M. Cauchy et d'Euler sur les réseaux polygonaux et sur les polyèdres, d'après M. Grunert

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 367-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__367_1>

THÉORÈMES DE M. CAUCHY ET D'EULER

Sur les réseaux polygonaux et sur les polyèdres,

d'après M. GRUNERT (Crelle, t. II, p. 367. 1827).

—

1. Soit un réseau polygonal situé ou non dans un même plan; et soit A le nombre des côtés, S le nombre des sommets et F le nombre des figures, supposons qu'il survienne une nouvelle figure de k côtés, ayant k' côtés en commun avec le premier réseau, et k'' non communs; représentons par A′, S′, F′ les nombres qui dans le second réseau sont analogues aux nombres C, S, F, dans le premier réseau. On a évidemment ces équations

$$k = k' + k'',$$
$$A' = A + k'',$$
$$F' = F + 1,$$
$$S' = S + k'' - 1.$$

Le nouveau réseau ayant k' côtés en communs, a aussi $k'+1$ sommets en commun, et par conséquent $k''-1$ sommets non communs ; ce qui donne la quatrième équation, et l'on déduit $S'+F'-A'=S+F-A$; donc $S+F-A$ est constant ; mais pour une seule figure $S = A$ et $F = 1$; donc $S + F - A = 1$; théorème de M. Cauchy.

II. Si dans un polyèdre de F faces, A arrêts et S sommets, nous supprimons une face, le polyèdre devient un réseau, le nombre des figures est $F-1$, donc $S+F-1+A=1$, ou $S+F=A+2$; théorème d'Euler. Tm.