Nouvelles annales de mathématiques

DURVILLE

Détermination des diviseurs rationnels du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 339-352

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__339_1>

DÉTERMINATION

des diviseurs rationnels du second degré.

PAR M. DURVILLE,
professeur au collége Saint-Louis.

L'extrême complication des calculs nécessaires pour la séparation et la détermination des racines incommensurables d'une équation d'un degré même peu élevé, me dispense d'insister sur les avantages que peut présenter une méthode d'abaissement. Celle que je me propose d'exposer a pour but la recherche des diviseurs rationnels du second degré.

Soit $Fx = 0$ une équation du degré m, débarrassée de ses racines commensurables, ramenée à la forme

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

et dont les coefficients sont entiers, les diviseurs rationnels du second degré devront avoir leurs coefficients entiers et seront de la forme $x^2 - px - q$.

Le quotient du polynôme Fx par $x^2 - px - q$ sera un polynôme entier ; si on représente par B_1, B_2 ..... le premier terme de chaque reste et par conséquent les coefficients successifs des termes du quotient, à partir du second, on aura les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
B_1 &= p + A_1, \\
B_2 &= pB_1 + q + A_2, \\
B_3 &= pB_2 + qB_1 + A_3, \\
B_4 &= pB_3 + qB_2 + A_4, \\
&\vdots \\
B_{m-3} &= pB_{m-4} + qB_{m-5} + A_{m-3}, \\
B_{m-2} &= pB_{m-3} + qB_{m-4} + A_{m-3}.
\end{aligned}$$

L'opération présentera un reste du premier degré $B_{m-1}x + B_m$ qui, devant être nul, quel que soit x, donnera les deux équations :

$$B_{m-1} = 0, \quad B_m = 0,$$

et d'après la loi de formation :

$$\begin{aligned}
B_{m-1} &= pB_{m-2} + qB_{m-3} + A_{m-1} = 0, \\
B_m &= qB_{m-2} + A_m = 0.
\end{aligned}$$

On peut, quel que soit le degré de l'equation donnée, éliminer les coefficients B_1, B_2, B_3.... etc., et obtenir les valeurs des polynômes B_{m-1} et B_m en fonction des quantités p et q.

En effet, considérons les équations :

(1)	$B_h = pB_{h-1}+qB_{h-2}+A_h$	1
(2)	$B_{h-1}=pB_{h-2}+qB_{h-3}+A_{h-1}$	p
(3)	$B_{h-2}=pB_{h-3}+qB_{h-4}+A_{h-2}$	p^2+q
(4)	$B_{h-3}=pB_{h-4}+qB_{h-5}+A_{h-3}$	p^3+2pq
	$B_{h-4}=pB_{h-5}+qB_{h-6}+A_{h-4}$	$p^4+3p^2q+q^2$
	$\vdots$	$p^5+4p^3q+3pq^2$
		$\vdots$
$(h-1)$	$B^2 = pB_1+q+A^2$	$p^{h-1}+C_{h-2,1}p^{h-3}q+C_{h-3,2}p^{h-5}q$
(h)	$B_1=q+A_1$	$p^h+C_{h-1,1}p^{h-2}q+C_{h-2,2}p^{h-4}q^2+C_{h-3,3}p^{h-6}q^3\ldots$

Multiplions l'équation (1) par 1, l'équation (2) par p, l'équation (3) par p^2+q, l'équation (4) par p^3+2pq, et ainsi de suite. La loi de ces facteurs est évidente ; si on représente par a, b, c trois facteurs consécutifs, le dernier $c = pb + aq$. On pourrait, au moyen du triangle de Pascal, former ces facteurs. Le premier terme de chaque facteur a l'unité pour coefficient, les coefficients des seconds termes sont la suite des nombres naturels, les coefficients des troisièmes termes sont les nombres figurés du second ordre, ceux des quatrièmes termes sont les nombres figurés du troisième ordre et ainsi de suite. En général, le facteur par lequel on devra multiplier l'équation du rang K sera :

$$p^k+(k-1)qp^{k-2}+\frac{(k-2)(k-3)}{1 \quad 2}q^2p^{k-4}+\text{etc.}\ldots.$$

ou

$$p^k+C_{k-1,\,1}\,qp^{k-2}+C_{k-2,\,2}\,q^2p^{k-4}+C_{k-3,\,3}\,q^3p^{k-6}\ldots..$$

dont le dernier terme sera $C_{\frac{k}{2},\,\frac{k}{2}}q^{\frac{k}{2}}$ si k est pair, et

$C_{\frac{k+1}{2},\,\frac{k-1}{2}}pq^{\frac{k-1}{2}}$ si k est impair.

Si on ajoute toutes ces égalités après les avoir multipliées par les facteurs correspondants, les coefficients B_1, B_2..... disparaîtront et on aura :

$$B_h = \left\{\begin{array}{l} A_h \\ + A_{h-2}q \\ + A_{h-4}q^2 \\ + A_{h-6}q^3 \\ \vdots \end{array}\right. \begin{array}{l} + A_{h-1} \\ + 2A_{h-3} \\ + 3A_{h-5} \\ + 4A_{h-7} \\ \end{array}\left|\, p + \begin{array}{l} A_{h-2} \\ + 3A_{h-4}q \\ + 6A_{h-6}q^2 \\ + 10A_{h-8}q^3 \\ \vdots \end{array}\right|\, p^2 + \begin{array}{l} A_{h-3} \\ + 4A_{h-5}q \\ + 10A_{h-7}q^2 \\ \\ \end{array}\left|\, p^3 \ldots\right.$$

$$\ldots\ldots + \left.\begin{array}{l} A_3 \\ + (h-2)A_1q \end{array}\right| p^{h-3} + \left.\begin{array}{l} A_2 \\ + (h-1)q \end{array}\right| p^{h-2} + A_1 p^{h-1} + p^h$$

Si on fait $h = m - 1$ et qu'on ordonne par rapport aux puissances décroissantes de p, on aura :

$$B_{m-1} = \left\{\begin{array}{l} p^{m-1} + A_1 p^{m-2} + \left.\begin{array}{l} A_2 \\ + (m-2)q \end{array}\right| p^{m-3} + \left.\begin{array}{l} A_3 \\ + (m-3)A_1q \end{array}\right| p^{m-4} \\ \quad + \left.\begin{array}{l} A_4 \\ + (m-4)A_2q \\ + (m-3)(m-4)q^2 \end{array}\right| p^{m-5} \ldots\ldots + \begin{array}{l} A_{m-1} \\ + A_{m-3}q \\ + A_{m-5}q^2 \\ \vdots \end{array} \end{array}\right\} = 0.$$

Si on fait $h = m - 2$ et qu'on ajoute $\frac{A_m}{q}$, on aura :

$$\frac{B_m}{q} = \left.\begin{array}{l} p^{m-2} + A_1 p^{m-3} + A_2 \\ \qquad\qquad + (m-3)q \end{array}\right| p^{m-4} \ldots\ldots + \left.\begin{array}{l} \frac{A_m}{q} \\ + A_{m-2} \\ + A_{m-4}q \\ + A_{m-6}q^2 \\ \vdots \end{array}\right\} = 0.$$

La loi de formation des termes de ces équations est facile à reconnaître.

Proposons-nous maintenant de déterminer les valeurs entières de p et q qui satisfont aux deux équations $B_{m-1} = 0$, $\frac{B_m}{q} = 0$. L'élimination de l'une des inconnues conduirait à une équation finale du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, et exigerait des calculs qui seraient bientôt impraticables, si le degré de l'équation était un peu élevé. On peut, en suivant une méthode qui présente une très-grande analogie avec celle des racines commensurables, trouver immédiatement les solutions entières de p et q.

Je remarque que les valeurs entières de p et q, qui satisfont aux deux équations $B_{m-1}=0$, $\frac{B_m}{q}=0$ doivent aussi satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}
0 &= qB_{m-2} + A_m \\
0 &= pB_{m-2} + qB_{m-3} + A_{m-1} \\
B_{m-2} &= pB_{m-3} + qB_{m-4} + A_{m-2} \\
&\vdots \\
B_2 &= pB_1 + q + A_2 \\
B_1 &= p + A_1
\end{aligned}$$

dans lesquelles les coefficients B_1, B_2, etc.... sont assujettis à être entiers ; et réciproquement les valeurs entières de p et q qui satisfont à ces m équations, en déterminant pour les coefficients B_1, B_2..... des valeurs entières, satisfont aux équations $B_{m-1}=0$ et $\frac{B_m}{q}=0$, et par conséquent sont les coefficients d'un diviseur du second degré du premier membre Fx de l'équation proposée.

Si on connaissait une valeur de q, en la substituant dans les deux équations $B_{m-1}=0$, $\frac{B_m}{q}=0$, celles-ci deviendraient fonctions de p seulement, et auraient au moins une racine entière commune : donc si on représente par G et H les termes indépendants de p dans ces deux équations, les valeurs entières de p correspondantes à la valeur de q devraient être des diviseurs communs de G et H.

De plus le quotient du premier membre $F(x)$, par le diviseur $x^2 - px - q$ devant être entier pour toute valeur entière donnée à x, $F(1)$ devra être divisible par $1 - p - q$, et $F(-1)$ par $1 + p - q$.

Ainsi on posera q égal à un diviseur de A_{m-1}, on substituera cette valeur dans les polynômes G et H,

$$G = A_{m-1} + A_{m-3}q + A_{m-5}q^2 + \text{etc.}\ldots$$
$$H = \frac{A_m}{q} + A_{m-2} + A_{m-4}q + \text{etc.}\ldots$$

On cherchera les diviseurs communs des deux nombres ainsi obtenus. Si à la valeur de q correspond une valeur entière de p, p devra être l'un de ces diviseurs. Les valeurs de p et q devront encore satisfaire aux deux conditions $\frac{F(1)}{1-p-q} = N$, $\frac{F(-1)}{1+p-q} = N'$, N et N' représentant des nombres entiers. On substituera les valeurs de p et q qui auront rempli ces conditions dans les m équations ci-dessus qui devront être vérifiées et donner des valeurs entières pour les coefficients B_1, B_2.....

Supposons que l'on ait trouvé un couple de valeurs entières $p = \alpha$, $q = \beta$, c'est-à-dire qu'on ait déterminé un diviseur $x^2 - \alpha x - \beta$. Si $F_1(x)$ est le quotient de $F(x)$ par $x^2 - \alpha x - \beta$, on aura $F_1(x) = x^{m-2} + B_1 x^{m-3} + \ldots + B_{m-3}x + B_{m-2}$, dont les coefficients sont connus. Si l'on procède à la recherche d'un nouveau diviseur, en représentant par C_1, C_2, C_3,... les premiers termes des restes de la division de $F_1(x)$ par $x^2 - px - q$, on aura les $m - 2$ équations

$$\begin{aligned}
0 &= qC_{m-4} + B_{m-2},\\
0 &= pC_{m-4} + qC_{m-5} + B_{m-3},\\
C_{m-4} &= pC_{m-5} + qC_{m-6} + B_{m-4},\\
C_{m-5} &= pC_{m-6} + qC_{m-7} + B_{m-5},\\
&\vdots\\
C_3 &= pC_1 + q + B_2,\\
C_1 &= p + B_1.
\end{aligned}$$

Les polynômes G_1 et H_1, indépendants de p dans les deux équations qui résulteraient de l'élimination de C_1, C_2, C_3.... se formeront de G et H en remplaçant dans ceux-ci A_m, A_{m-1}..., par B_{m-2}, B_{m-3}..., ainsi

$$G_1 = B_{m-3} + B_{m-5}q + \text{etc....}$$
$$H_1 = \frac{B_{m-2}}{q} + B_{m-4} + B_{m-6}q^2 + \text{etc ...}$$

De l'équation $F(x) = (x^2 - \alpha x - \beta) F_1 x$, on tire en faisant successivement $x = 1$ et $x = -1$, $F_1(1) = \frac{F(1)}{1 - \alpha - \beta}$, $F_1(-1) = \frac{F(-1)}{1 + \alpha - \beta}$. Ainsi on aura immédiatement les valeurs de $F(1)$ et $F_1(-1)$ · à chaque opération qui fera connaître un diviseur du second degré, le nombre des équations de condition diminuera de deux unités, les polynômes G_1, H_1, G_2, H_2 se réduiront, et les calculs iront en se simplifiant de plus en plus.

Pour eviter d'essayer les valeurs $p = 1$, $p = -1$, avec chacune des valeurs de q, on remarquera que si dans les equations $\frac{F(1)}{1 - p - q} = N$, $\frac{F(-1)}{1 + p - q} = N'$, on fait $p = 1$, on obtient $\frac{F(1)}{-q} = N$, $\frac{F(-1)}{2 - q} = N'$, on devra donc avec $p = 1$, essayer seulement les valeurs de q qui satisfont à ces conditions, et de même avec $p = -1$, les valeurs de q qui remplissent les conditions $\frac{F(1)}{2 - q} = N$, $\frac{F(-1)}{-q} = N'$.

Pour simplifier les calculs, il sera bon dans la pratique de commencer par déterminer les systèmes dans lesquels p et q sont différents de ± 1, ensuite de chercher ceux dans lesquels $q = \pm 1$, et enfin on procédera à la recherche de ceux dans lesquels $p = \pm 1$.

Application de la méthode précédente.

Soit l'équation

$$Fx = x^8 - 20x^7 + 100x^6 + 28x^5 - 466x^4 - 1440x^3 + \\ + 175x^2 + 222x - 40 = 0,$$

$$\text{A} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = qB_6 - 40, \\ 0 = pB_6 + qB_5 + 222, \\ B_6 = pB_5 + qB_4 + 175, \\ B_5 = pB_4 + qB_3 - 1440, \\ B_4 = qB_3 + qB_2 - 466, \\ B_3 = pB_2 + qB_1 + 28, \\ B_2 = pB_1 + q + 100, \\ B_1 = p - 20; \end{array} \right.$$

$$G = 222 - 1440q + 28q^2 - 20q^3,$$

$$H = -\frac{40}{q} + 175 - 466q + 100q^2 + q^3,$$

$$F(1) = -1440,$$

$$F(-1) = 980,$$

q doit être un diviseur de 40.

$$1^\circ \qquad q = 2,$$

les valeurs particulières de G et H sont :

$$G = -2706, \quad H = -369,$$

dont les diviseurs communs sont ± 3, ± 41.

Les solutions $(q = 2,\ p = 3)$, $(q = 2,\ p = -3)$, satisfont seules aux conditions $\dfrac{F(1)}{1-p-q} = N$, $\dfrac{F(-1)}{1+p-q} = N'$, il convient de les substituer dans les équations (A).

Essayons d'abord $(q = 2,\ p = 3)$. On aura :

$$B_6 = 20,$$

$$B_5 = -141,$$

$$B_4 = 134,$$

B_3 fractionnaire.

Donc ce système doit être rejeté. Il en est de même du système ($q=2$, $p=-3$), qui donne également pour B_1 une valeur fractionnaire.

$$2^\circ \qquad q=-2,$$

les valeurs de G et H sont :

$$G=3374, \qquad H=1519,$$

diviseurs communs ± 7.

Le système ($q=-2$, $p=7$) satisfait seul aux deux conditions $\frac{F(1)}{1-p-q}=N$, $\frac{F(-1)}{1+p-q}=N'$. Substituant ces valeurs dans les equations (A), on trouve

$B_6=-20$, $B_5=41$, $B_4=241$, $B_3=103$, $B_2=7$, $B_1=-13$,

donc Fx admet le diviseur x^2-7x+2.

Cherchons les autres diviseurs, on aura les équations de condition

$$B\left\{\begin{aligned} 0 &= qC_4-20, \\ 0 &= pC_4+qC_3+41, \\ C_4 &= pC_3+qC_2+241, \\ C_3 &= pC_2+qC_1+103, \\ C_2 &= pC_1+q+7, \\ C_1 &= p-13, \end{aligned}\right.$$

$$G_1=41+103q-13q^2,$$

$$H_1=-\frac{20}{q}+241+7q+q^2,$$

$$F_1(1)=\frac{F(1)}{1-7+2}=-\frac{1440}{-4}=360,$$

$$F_1(-1)=\frac{F(-1)}{1+7+2}=\frac{980}{10}=98,$$

et q doit être un diviseur de $B_6=-20$.

-2 étant un diviseur de 20, on posera encore $q=-2$, à cette valeur ne peut répondre d'après ce qui précède que $p=7$, mais on s'assurera facilement que ce système doit être rejeté, car $F_1(-1)$ n'est pas divisible par $1-p-q$.

$$3^\circ \qquad q=+4,$$
$$G_1=245, \quad H_1=280,$$

dont les diviseurs communs sont ± 5, ± 7.

Le système ($q=4$, $p=5$) est le seul qui remplisse les conditions $\frac{F_1(1)}{1-p-q}=N$, $\frac{F(-1)}{1+p-q}=N'$; mais substitué dans les équations (B), il donne pour C_3 une valeur fractionnaire.

$$4^\circ \qquad q=-4,$$
$$G_1=-579, \quad H_1=234,$$

diviseurs communs ± 3.

Le seul système qui doive être essayé est ($q=-4$, $p=-3$); substitué dans les équations de condition, on trouve les valeurs entières $C_4=-5$, $C_3=14$, $C_2=51$, $C_1=-16$, donc F_1x admet le diviseur x^2+3x+4.

Cherchons les diviseurs du second degré du quotient. On aura de même :

$$\text{C} \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= qD_2-5, \\ 0 &= pD_2+qD_1+14, \\ D_2 &= pD_1+q+51, \\ D_1 &= p-16, \end{aligned} \right.$$

$$G_2=14-16q, \quad H_2=-\frac{5}{q}+51+q,$$

$$F_2(1)=\frac{F_1(1)}{1+3+4}=45, \quad F_2(-1)=\frac{F_1(-1)}{1-3+4}=49,$$

d'ailleurs q doit diviser 5.

$$5^\circ \qquad q=+5,$$
$$G_2=-66, \quad H_2=+55,$$

diviseurs communs ± 11.

Le système ($q=+5$, $p=11$) satisfait seul aux deux conditions $\dfrac{F_2(1)}{1-p-q} = N$, $\dfrac{F_2(-1)}{1+p-q} = N'$, et en substituant les valeurs de ce système dans les équations de condition (C), on obtient $D_2 = 1$, $D_1 = -5$; donc $F_2(x)$ admet le diviseur $x^2 - 11x - 5$, et le quotient est $x^2 - D_1 x + D_2$, ou $x^2 - 5x + 1$: donc le premier membre de l'équation proposée est égal au produit

$$(x^2 - 7x + 2)(x^2 + 3x + 4)(x^2 - 11x - 5)(x^2 - 5x + 1).$$

Second exemple.

Soit l'équation

$$\begin{aligned} Fx = x^9 - 17x^8 + 93x^7 - 125x^6 - 340x^5 + 483x^4 + \\ + 1356x^3 - 1567x^2 + 500x - 44 = 0, \end{aligned}$$

équations de condition :

$$\mathrm{A} \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= qB_7 - 44, \\ 0 &= pB_7 + qB_6 + 500, \\ B_7 &= pB_6 + qB_5 - 1567, \\ B_6 &= pB_5 + qB_4 + 1356, \\ B_5 &= pB_4 + qB_3 + 483, \\ B_4 &= pB_3 + qB_2 - 340, \\ B_3 &= pB_2 + qB_1 - 125, \\ B_2 &= pB_1 + q + 93, \\ B_1 &= p - 17, \end{aligned} \right.$$

$$G = 500 + 1356q - 340q^2 + 93q^3 + q^4,$$

$$H = -\frac{44}{q} - 1567 + 483q - 125q^2 - 17q^3,$$

$$F(1) = 340,$$

$$F(-1) = -2880,$$

q doit être un diviseur de 44.

Soit $\qquad q = +2,$

$$G = 2612, \quad H = 1259,$$

pas de diviseurs communs.

$$q = -2,$$
$$G = -4300, \quad H = -2875,$$

diviseurs communs ± 5, ± 25.

Le seul système qui satisfasse aux conditions $\dfrac{F(1)}{1-p-q} = N$, $\dfrac{F(-1)}{1+p-q} = N'$, est $(q = -2,\ p = +5)$: en le substituant dans les équations de condition (A), on trouve les valeurs entières $B_7 = -22$, $B_6 = 195$, $B_5 = -285$, $B_4 = -132$, $B_3 = 54$, $B_2 = 31$, $B_1 = -12$. Ainsi Fx est divisible par

$$x^2 - 5x + 2.$$

Nouvelles équations de condition :

$$\text{B} \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= qC_5 - 22, \\ 0 &= pC_5 + qC_4 + 195, \\ C_5 &= pC_4 + qC_3 - 285, \\ C_4 &= pC_3 + qC_2 - 132, \\ C_3 &= pC_2 + qC_1 + 54, \\ C_2 &= pC_1 + q + 31, \\ C_1 &= p - 12, \end{aligned} \right.$$

$$G_1 = 195 - 132q + 31q^2 + q^3,$$
$$H_1 = -\frac{22}{q} - 285 + 54q - 12q^2,$$
$$F_1(1) = -170, \quad F_1(-1) = -360,$$

q doit diviser 22.

Il convient d'essayer encore $q = -2$, pour cette valeur

$$G_1 = 575, \quad H_1 = -430,$$

diviseurs communs ± 5.

Le système $(q = -2,\ p = +5)$ est le seul qui doive être essayé, car l'autre système $(q = -2,\ p = -5)$, a déjà été rejeté : substitué dans les équations B, il donne les valeurs entières $C_5 = -11$, $C_4 = 70$, $C_3 = 38$, $C_2 = -6$, $C_1 = -7$, donc $x^2 - 5x + 2$, est encore diviseur.

Nouvelles équations de conditions :

$$
C \quad \begin{cases} 0 = qD_3 - 11, \\ 0 = pD_3 + qD_2 + 70, \\ D_3 = pD_2 + qD_1 + 38, \\ D_2 = pD_1 + q - 6, \\ D_1 = p - 7, \end{cases}
$$

$$G_2 = 70 - 6q + q^2,$$

$$H_2 = -\frac{11}{q} + 38 - 7q,$$

$$F_2(1) = -85, \qquad F_2(-1) = -45,$$

et q doit être un diviseur de 11.

Soit donc $\qquad q = +11,$

$$G_2 = 125, \qquad H_2 = -40,$$

diviseurs communs ± 5.

Les deux systèmes ($q = +11$, $p=5$) ($q=+11$, $p=-5$), doivent être rejetés.

$$q = -11.$$

$$G_2 = 257, \qquad H_2 = 116,$$

pas de diviseurs communs.

Il faut maintenant essayer les systèmes de valeurs dans lesquels $q = \pm 1$.

Pour $q = 1$, $G_2 = 65$, $H_2 = 20$, diviseurs communs ± 5; les valeurs ($q = 1$, $p = 5$), ($q = 1$, $p = -5$), satisfont aux conditions $\dfrac{F_2(1)}{1 - p - q} = N$, $\dfrac{F_2(-1)}{1 + p - q} = N'$, mais substituées dans les équations (C), elles ne les vérifient pas.

Pour $q = -1$, $G_2 = 77$, $H_2 = 56$, diviseurs communs ± 7. Le système ($q = -1$, $p = -7$), doit être rejeté, le second ($q = -1$, $p = 7$) doit être essayé; substituant ces valeurs de p

et q dans les équations (C), elles sont satisfaites et donnent :

$$D_3 = -11, \quad D_2 = -7, \quad D_1 = 0.$$

Donc le quotient de $F_2(x)$ par x^2-7x+1 est $x^3-7x-11$; ainsi le premier membre de l'équation proposée.

$$Fx = (x^2 - 5x + 2)^2 (x^2 - 7x + 1) (x^3 - 7x - 11).$$

Je me propose dans un numéro prochain d'étendre la méthode précédente à la recherche des diviseurs rationnels du troisième degré.