NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI FAURE

Lieu des intersections successives des ellipses ayant un diamètre donné de grandeur et de position et son conjugué donné de grandeur seulement

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 337-339

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__337_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

LIEU DES INTERSECTIONS SUCCESSIVES

des ellipses ayant un diamètre donné de grandeur et de position et son conjugué donné de grandeur seulement.

PAR M. HENRI FAURE,
élève en spéciales.

—

Soit $AB = 2a$ (*fig.* 29) le diamètre donné de grandeur et de position, $COC' = 2b$ son conjugué dans une des diverses positions qu'il peut prendre. Nous choisirons pour axe des x le diamètre AB, et pour axe des y la perpendiculaire élevée au point O à ce diamètre. De cette manière le lieu que nous obtiendrons devant être symétrique par rapport aux deux axes, l'équation qui le représente ne contiendra que les puissances paires des deux variables.

L'équation de l'ellipse qui passe par les points A, B, C, C', et qui a le point O pour centre, est de la forme :

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 - 1 = 0.$$

Nous allons déterminer les coefficients A, B, C pour une position particulière du diamètre CC'.

(*) Voir tome I, page 265 et tome II, page 342.

Posons tang BOC$=m$. Soient de plus x, y les coordonnées du point C.

Si dans l'équation (1) on fait $y=0$, $x=a$, on obtient :

$$Ca^2-1=0, \qquad \text{d'où} \qquad C=\frac{1}{a^2}.$$

Par un point quelconque K de CC' menons une parallèle à AB, en désignant par I et H les points où cette droite rencontre l'ellipse, on aura IK $=$ KH. L'équation de la droite HIS étant de la forme $y=$ K, si dans l'équation de l'ellipse nous faisons $y=$ K, l'équation

$$Ak^2+Bkx+Cx^2-1=0,$$

donnera les abscisses des points d'intersection de la droite et de l'ellipse. Les coordonnées du point K satisfaisant à l'équation $y=mx$ de la droite CC', on a KS $=\frac{k}{m}$. Or KS est la demi-somme des racines de l'équation précédente ; donc $\frac{k}{m}=-\frac{Bk}{2C}$, et en remplaçant C par sa valeur, $B=-\frac{2}{a^2m}$.

En faisant $y=mx$ dans l'équation de l'ellipse, on a :

$$x^2=\frac{1}{Am^2+Bm+C} \qquad \text{et} \qquad y^2=\frac{m^2}{Am^2+Bm+C}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation $x^2+y^2=b^2$, puis remplaçant B et C par leurs valeurs, on tirera la valeur de A :

$$A=\frac{a^2(m^2+1)+b^2}{a^2b^2m^2}.$$

L'équation de l'ellipse devient donc :

$$(2) \quad (a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)m^2-2b^2xym+(a^2+b^2)y^2=0.$$

Si actuellement nous donnons à l'angle BOC un certain accroissement, la tangente de cet angle aura une certaine valeur $m+h$, et l'équation de l'ellipse dans cette nouvelle position sera :

$$(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)(m+h)^2-2b^2xy(m+h)+(a^2+b^2)y^2=0.$$

Retranchant de cette équation l'équation (2), on a, après avoir divisé par h :

$$(3) \qquad (a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)(2m+h)-2b^2xy=0.$$

Tous les couples de valeurs de x et de y qui satisfont à la fois à l'équation (2) et (3) donnent les coordonnées des points d'intersection des deux ellipses.

Si l'on suppose $h=0$, l'équation (3) se réduit à

$$(4) \qquad (a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)m-b^2xy=0,$$

et les valeurs de x et de y qui satisfont aux équations (2) et (4) sont les coordonnées des points d'intersection des deux ellipses dans deux positions consécutives du diamètre CC'. Si donc entre ces deux équations on élimine m, on aura l'équation du lieu géométrique cherché, puisque l'équation résultante donnera les coordonnées des points d'intersection des deux ellipses dans deux positions consécutives quelconques du conjugué du diamètre AB.

Effectuant l'élimination, on a :

$$(a^2+b^2)y^2+b^2x^2-b^2(a^2+b^2)=0,$$

équation d'une ellipse dont les demi-axes sont b et $\sqrt{a^2+b^2}$.