NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorèmes et problèmes sur les centres des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 304-310

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__304_0>

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

Sur les centres des coniques.

(V. p. 266.)

XI. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique qui passe par quatre points donnés est une conique.

Démonstration. Conservons les mêmes données et la même notation du problème I (p. 260) et soient x', y', les coordonnées du quatrième point D ; remplaçant x et y dans l'équation (1) par x' et y', et considérant t, u comme les coordonnées courantes du centre, on a l'équation du lieu cherché ; ordonnant par rapport à t et à u, il vient :

$$\left.\begin{array}{r} 2x'(x'-p)u^2 - 4x'y'ut + 2y'(y'-q)t^2 + \\ + ux'(2py'-qx'+pq) + ty'(2qx'-py'+pq) - pqx'y' = 0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Il est facile de vérifier que la courbe passe par les neuf points suivants : savoir, les six milieux des quatre côtés du quadrilatère ABCD et des deux diagonales AD, BC et par les trois points d'intersection des côtés opposés AB, CD ; AC, CD et des deux diagonales AD, BC et c'est ce qu'on peut prévoir à priori ; puisque les côtés opposés et les deux diagonales sont trois coniques passant par les quatre points donnés, et les intersections respectives sont les centres de ces coniques. Il s'ensuit aussi que le centre de la conique est le point de moyenne distance des quatre sommets A, B, C, D du quadrilatère.

Calculons les éléments de la courbe. On a sans aucune difficulté : $m = 16x'y'(py' + qx' - pq)$; ce qui détermine l'espèce de la courbe ; si le point D est dans l'intérieur du triangle ABC ou dans les angles opposés à A, B, C, m est négatif et le lieu est une ellipse ; ce qui est d'ailleurs évident ; car, dans ce cas, on ne peut faire passer une parabole par les quatre points ; par conséquent, aucun centre ne peut être à l'infini ; dans toute autre position du point D, le lieu est une hyperbole et ne peut jamais être une parabole ; en effet pour que l'on ait $m=0$, il faut que D se trouve sur l'un des trois côtés du triangle ABC ; alors les coniques qui passent par les quatre points se réduisent à des systèmes de droites

$$k = 4x'y'(x'+p)(py'+qx'-pq),$$
$$k' = 4x'y'(y'+q)(py'+qx'-pq),$$
$$n = x'y'[(2py'-qx'+pq)(2qx'-py+pq)8pqx'q'];$$
$$N = 2[x'^2+y'^2-px'-qy'+2x'y'\cos\gamma], \text{ (tome I, p. 489)}.$$

Calcul de L ; on a

$$Ak^2 + Bkk' + Ck' + mDk' + mEk + m^2F = mL, \text{ (t. I, p. 490)}.$$

Remplaçant ces lettres par leurs valeurs, il vient, toutes réductions faites :

$$L = 2x'y'(py'+qx'-pq)\,[y'(y'-q)[(y'+q)^2-2(x'^2+p^2)]+ \\ + x'(x'-p)[(x'+p)^2-2(y'^2+q^2)]\,].$$

Observation. Il suffit que l'un des quatre facteurs de L devienne nul, pour que L soit zéro ; alors le centre devient une droite ou bien le lieu est impossible.

Remarque I. Soient O et O′ les centres des deux coniques circonscrites au quadrilatère ABCD ; si l'on cherche le lieu géométrique du point M de rencontre de deux diamètres OM, O′M, tels que leurs conjugués respectifs soient parallèles, on trouve facilement que ce lieu est une conique. Les milieux des quatre côtés et des deux diagonales du quadrilatère sont évidemment sur cette conique ; elle se confond donc avec la conique, lieu des centres ; mais elle subsiste même lorsque deux points d'intersection des deux coniques données, ou même les quatre, deviennent imaginaires.

Remarque II. La direction des axes principaux est donnée par l'équation :

$$x'y^2[x'-p-q'\cos\gamma]+xy[x'(x'-p)-y'(y'-q)]+$$
$$+y'x^2[x'\cos\gamma-y'+q]=0,\ \text{(t. I, p. 496).}$$

Le coefficient angulaire des asymptotes $=\dfrac{4x'y'\pm\sqrt{m}}{4x'(x'-p)}$;

c'est aussi le coefficient angulaire des deux diamètres des deux paraboles qui passent par les quatre points donnés

XII. *Théorème.* A un quadrilatère donné, on ne peut circonscrire plus de huit coniques semblables à une conique donnée, et réciproquement dans une conique donnée, on ne peut inscrire plus de huit quadrilatères semblables à un quadrilatère donné.

Démonstration. Conservons la même notation que dans le théorème précédent : l'équation (3) donne une relation du second degré entre les coordonnées t, u du centre ; la condition de similitude donne une seconde relation, entre ces coordonnées, et du quatrième degré, savoir :

$$[t(2t-p)+u(2u-q)+(2t-p)(2u-q)\cos\gamma]^2=$$
$$=c[2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)],\ \text{(t. I, p. 495)},$$

où c représente une constante : et comme les deux équations sont complètes, l'élimination donne une équation du huitième degré.

XIII. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique passant par trois points donnés et touchant une droite donnée, est du quatrième degré.

Démonstration. Prenons la même notation qu'au problème 1 (p. 260) et soit $dy+ex+f=0$, l'équation de la droite donnée ; l'équation de la conique passant par les trois points est

$$y^2+Bxy+Cx^2-qy-Cpx=0,\ \text{(p. 261)},$$

La droite devant être tangente, l'on a :

$$l'd^2 - 2den + le^2 + mf^2 + 2fdk' + 2fek = 0\,,\ (\text{t. II, p. 108}),$$

or

$$m = B^2 - 4C,\ k = Bq - 2Cp,\ k' = C(Bp - 2q),$$
$$l = q^2,\ l' = C^2p^2,\ n = Cpq,\ L = C(Cp^2 - Bpq + q^2),$$
$$B = \frac{q - 2u}{t},\quad C = \frac{u}{t} \cdot \frac{2u - q}{2t - p},\quad (\text{p. 261}).$$

Remplaçant les lettres l, l', m, B, C par leurs valeurs, on obtient une équation du quatrième degré en t et u.

XIV. *Théorème.* Le lieu du centre d'une conique passant par deux points donnés et touchant une droite donnée en un point donné, est une conique.

Démonstration. Conservons même notation que dans le théorème précédent et supposons que la droite donnée passe par l'origine qui est alors un point double ou de contact ; il suffit de faire $f = 0$, et l'on a $l'd^2 - 2den + le^2 = 0$, ou $C^2pd^2 - 2Cpqde + q^2e^2 = 0$, d'où $Cpd - qe = 0$; ou bien $pdu(2u - q) - qet\,(2t - p) = 0$; équation d'une conique, passant par l'origine, ce qui doit être, puisque les axes forment un système conique, qui satisfait à la question ; donc l'origine est un centre.

XV. Le lieu du centre d'une conique touchant trois droites données, et passant par un point donné, est une parabole.

Démonstration. Mêmes données et même notation qu'au problème VII (p. 264), et de plus x', y' coordonnées du point ; il suffit de considérer dans l'équation que donne la solution de ce problème, t et u comme les coordonnées courantes du centre, et de remplacer x et y par x' et y' ; le lieu cherché a pour équation $(ty' - ux')^2 + 2un'x' + 2tn'y' + n'^2 - 2n'x'y' = 0$; équation d'une parabole.

XVI. Le lieu du centre d'une conique touchant quatre droites données, est une droite.

Démonstration. C'est le théorème de Newton; on en a déjà donné une démonstration (*voir* t. II, p. 108), qui est susceptible de simplification : prenons deux de ces droites pour axes et soient $dy+ex+f=0$; $d'y+e'x+f'=0$, les équations des deux autres droites.

On a donc les deux relations

$$\left.\begin{array}{r} -2den'+f^2+2fdu+2eft=0, \\ -2d'e'n'+f'^2+2f'd'u+2e'f't=0, \end{array}\right\} \text{ t. II, p. 108)},$$

car

$$l=l'=0,\ n'=\frac{n}{m},\ t=\frac{k}{m},\ u=\frac{k'}{m};$$

t et u coordonnées du centre.

Éliminant n', il vient :

$$2dd'(fe'-f'e)u+2ee'(fd'-f'd)t=def'^2-d'e'f^2,$$

équation d'une droite passant par les trois milieux des trois diagonales du quadrilatère complet; car, ces trois droites représentant trois ellipses satisfont au problème, et leurs milieux sont des centres.

XVII. *Problème.* Une conique touchant cinq droites, trouver les coordonnées du centre et une équation de cette conique.

Solution. Conservons mêmes données que dans le théorème précédent, et soit $d''y+e''x+f''=0$ l'équation de la cinquième tangente, on a alors

$$2dd''(fe''-f''e)\,u+2ee''(fd''-f''d)\,t=def''^2-d''e''f^2;$$

on a donc deux équations du premier degré en t et u; on connaît donc les coordonnées du centre, et le problème VII (p. 264) donne l'équation de la conique.

Observation. Il est évident qu'on peut trouver le centre par une construction géométrique.

XVIII. *Problème.* Une conique passant par cinq points

donnés, déterminer les coordonnées du centre et une équation de la courbe.

Solution. Conservons la notation du théorème XI et soient x'', y'' les coordonnées du cinquième point; outre l'équation (3) entre les coordonnées du centre, on aura une seconde équation, entre les mêmes inconnues, en changeant x' et y' en x'' et y''; l'élimination de u, donne une équation en t du quatrième degré, d'où il suffit de connaître les deux premiers termes $Mt^4 + Nt^3 +$ etc, et ces coefficients sont connus (*voir* t. II, p. 35); la somme des quatre racines est $-\frac{N}{M}$; or les deux lignes représentées par ces deux équations ont trois points en commun, savoir : les milieux de AB, AC, BC; l'équation en t a donc trois racines égales, l'une à zéro et les deux autres à $\frac{p}{2}$; la somme des trois racines est égale à p; donc la quatrième racine ou l'abscisse du centre est $-\frac{N}{M} - p$; on trouvera par des considérations semblables, l'ordonnée du centre; connaissant les coordonnées du centre, le problème I fait connaître l'équation de la courbe; pour qu'elle soit une parabole, il faut et il suffit qu'on ait $M = 0$; on sait que M est le même pour l'équation du quatrième degré soit en u soit en t.

Autrement : prenons l'équation de la conique passant par trois points (problème I, p. 261); remplaçant x et y successivement par x', y' et x'', y''; on obtient deux équations du premier degré entre B et C; elles donnent :

$$\mathrm{BP} = y''x'(x'-p)(y''-q) - y'x''(x''-p)(y'-q),$$
$$\mathrm{CP} = y'y''[q(x'-x'') + x''y' - x'y''],$$
$$\mathrm{P} = x'x''[p(y''-y') + y'x'' - x'y''];$$

quantités faciles à construire.

L'équation de la tangente à l'origine est $qy + Cpx = 0$;

d'ailleurs par l'hexagramme de Pascal, on peut mener par les cinq points, les cinq tangentes à la conique non décrite ; et l'on est ainsi ramené au problème précédent. Tm.