NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Note sur l'angle de contingence et sur l'angle de torsion

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 266-270

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__266_1>

NOTE

Sur l'angle de contingence et sur l'angle de torsion.

I. Deux tangentes à une courbe plane ou à double courbure infiniment rapprochées forment quatre angles, dont deux sont aigus et infiniment petits, et deux autres obtus, différant infiniment peu de deux angles droits; on nomme ordinairement angle de *contingence* celui de ces quatre angles qui ne renferme pas le petit arc de courbe. Le sinus de cet angle est évidemment égal au sinus de l'angle formé par les deux normales *principales* qui passent par les extrémités du petit arc. Si du sommet de cet angle comme centre on décrit une circonférence dans le plan de l'angle (plan osculateur), la longueur du petit arc intercepté est la mesure de l'angle, et, à cause de sa petitesse, cette longueur est aussi celle du sinus de cet angle, ou du sinus de l'angle de contingence ; désignant par ds', ds, R, le sinus ou l'arc de l'angle des deux normales, la longueur du petit arc de courbe, la longueur du rayon de courbure, on a $ds' = \frac{ds}{R}$, équation que l'on énonce ordinairement ainsi : l'angle de contingence est égal à la différentielle de l'arc divisée par le rayon de courbure; mais cette locution semble renfermer quelque chose d'indécis. Une quantité infiniment petite, une différentielle prise isolément, ne présente aucun sens. Nous croyons que les considérations suivantes, empruntées à la théorie infinitésimale de Newton, et dont nous avons déjà fait usage, sont propres à jeter quelque clarté sur ce point de doctrine.

II. Soit $f(x, y) = 0$, l'équation d'une première courbe plane, et $\varphi(x, y) = 0$, l'équation d'une seconde courbe, située dans le même plan. Par un point M pris sur cette seconde courbe, menons deux tangentes MP, MQ à la première courbe ; P et Q sont les points de contact. Lorsque le point M se meut sur la seconde courbe, la corde PQ enveloppera une troisième courbe, et soit O le point où la corde PQ touche son enveloppe, prenons un point M' infiniment voisin de M, sur la seconde courbe, et concevons deux nouvelles tangentes M'P', M'Q' ; PP' et QQ' sont deux arcs infiniment petits, et d'après un théorème de Newton (*v.* t. III, p. 580), l'on a $\frac{PP'}{QQ'} = \frac{PM.OP}{QM.OQ}$; concevons par P et P' deux normales se rencontrant au point T, et de même en Q et Q' deux normales se rencontrant en U ; ces points sont, comme on sait, les centres de courbure en P et en Q, et l'on a

$$\frac{\text{angle PTP}'}{\text{angle QUQ}'} = \frac{UQ}{TP} \cdot \frac{PP'}{QQ'} = \frac{UQ}{TP} \cdot \frac{PM.OP}{QM.OQ};$$

ainsi les angles de contingence en P et en Q, tous deux infiniment petits, ont donc entre eux un rapport fini, qui dépend de la nature de la seconde courbe que l'on peut prendre arbitrairement; donc ce rapport est aussi arbitraire. On est convenu de prendre une seconde courbe telle que le rapport $\frac{PM.OP}{QM.OQ}$ soit constamment égal à l'unité; ce qui répond au cas où la corde PQ soustend constamment un arc de même longueur; alors on a aussi $\frac{PP'}{QQ'}=\frac{\text{angle } PTP'}{\text{angle } QOQ'}=\frac{OQ}{TP}$, c'est-à-dire qu'alors les angles de contingence sont en raison inverse des rayons de courbure.

III. On peut encore éclaircir ce qui précède par des considérations de mouvement. Supposons que la première courbe soit parcourue d'un mouvement uniforme par un point matériel avec une vitesse égale à l'unité. De sorte qu'en tous les points on aura $\frac{ds}{dt}=1$; à partir du centre de courbure T portons $TI=1$ sur le rayon de courbure TP, entre T et P; concevons que le point I tourne avec la normale TP, pendant l'instant dt, autour du point fixe T; la vitesse angulaire du point I sera $\frac{1}{PT}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{1}{PT}$; ainsi l'angle de contingence n'est autre que la vitesse angulaire du rayon de courbure autour du centre de courbure; en général si on développe une courbe, de telle sorte que l'extrémité du fil ait une vitesse constante égale à l'unité, l'angle de contingence d'un point de la développante est la même chose que la vitesse angulaire du fil en ce point.

Lorqu'un point matériel est assujetti à décrire une ligne donnée, on sait que la pression en chaque point est représentée par le carré de la vitesse en ce point divisé par le rayon de courbure; donc, si cette vitesse est égale à l'unité, la pression est représentée aussi par l'angle de contingence.

IV. *Angle de torsion.* Soit une figure polygonale plane ABCDEF;.. rendant fixe le côté AB, supposons que BC tourne autour de lui-même en se tordant d'un angle α, et entraîne avec lui le reste de la figure; alors le plan CDEF... fera avec le plan ABC un angle α; dans cette position, fixant CD, supposons que DE se torde d'un angle α' et entraîne le reste du polygone; alors le plan DEF... fera avec le plan BCD un angle de torsion α', et opérant ainsi successivement sur tous les côtés, on aura un polygone gauche, où trois côtés successifs seront toujours dans deux plans différents dont l'inclinaison dépend de l'angle de torsion; et réciproquement tout polygone gauche peut être conçu comme étant le résultat de la torsion d'un polygone plan. Si on remplace le polygone par une courbe plane et opérant d'une manière analogue, on obtiendra une courbe gauche; les plans des deux côtés successifs deviennent des *plans osculateurs*; chaque angle de torsion est évidemment infiniment petit; mais le rapport de deux angles de torsion est une quantité finie, qu'il est facile de déterminer En effet, soit un point P pris sur une courbe gauche; par ce point passent trois droites déterminées de direction, savoir: 1° la tangente à la courbe; 2° la normale principale, ou celle qui se trouve dans le plan osculateur; 3° une perpendiculaire à ce plan; prises deux à deux. ces droites forment trois plans, lesquels, considérés pour tous les points de la courbe, ont pour enveloppe trois surfaces développables se coupant orthogonalement. Le plan déterminé par la première et la troisième droite coupe sa surface enveloppe correspondante suivant une courbe plane, dont deux normales infiniment voisines sont perpendiculaires à deux plans osculateurs infiniment voisins de la courbe gauche; donc l'angle de contingence de la courbe plane mesure l'angle de torsion de la courbe gauche, et nous savons que cet angle de contingence est mesuré par la valeur réciproque du rayon de courbure de la courbe plane qu'on peut appeler le rayon de torsion de la courbe gauche; ainsi ce genre de ligne a une courbure qu'elle partage aussi avec les courbes planes, et qui consiste dans le changement incessant de direction des tangentes, et une autre courbure qui résulte de la torsion ou du changement incessant de direction des plans osculateurs; c'est ce qui a fait donner à ces lignes le nom de courbe à double courbure, qu'on doit à l'académicien Pitot.

Dans le cas actuel, la courbe à double courbure, d'après le théorème de M. Dupin, est une ligne de courbure dans chacune des trois surfaces développables. Tm.