E. CATALAN

Lettre. Sur les fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 257-259
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__257_0>

LETTRE

Sur les fractions continues.

Mon cher monsieur Terquem,

Le dernier numéro des *Nouvelles Annales* contient une lettre de M. *Guilmin*, relative à ma note sur les fractions continues périodiques. Cette lettre demande une réponse : soyez assez bon pour accueillir celle-ci.

M. Guilmin dit d'abord : « M. Catalan démontre une proposition dont voici l'énoncé : *Dans une fraction continue périodique, le nombre des périodes étant illimité, il est indifférent d'en prendre une de plus ou une de moins.* »

Cet énoncé n'est pas de moi, et je serais fâché qu'il en fût.

M. Guilmin dit ensuite :

« Soient

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{y}}} \qquad y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}}$$

» Si on forme successivement les réduites de x et de y, en prenant dans chacune le même nombre de quotients incomplets, on aura chaque fois le même résultat pour les deux; or une réduite $\frac{Q}{Q'}$ obtenue à cette condition, diffère de x et de y, *dans le même sens* d'une quantité moindre que... » etc.

J'avoue qu'il m'est absolument impossible de suivre le raisonnement de M. Guilmin, et d'attacher un sens clair à des phrases telles que celles-ci :

« Si on forme successivement les réduites de x et de y,
» en prenant dans chacune *le même nombre de quotients in-*
» *complets* » ;

» On aura *chaque fois* le même résultat pour les deux » ;

» Une réduite commune *obtenue à cette condition* » ;

» Diffère *dans le même sens d'une quantité*... ; »

etc.

Je voudrais, encore un coup, débrouiller cet écheveau, mais je ne puis.

M. Guilmin dit plus loin : « M. Catalan *a moins eu peut-*
» *être pour objet* de démontrer cette proposition que d'établir
» les théorèmes, » etc.

La supposition de M. Guilmin est très-fondée. Si j'avais voulu seulement démontrer la proposition dont il s'agit, j'aurais dit :

« La différence entre deux réduites consécutives $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, peut devenir aussi petite que l'on voudra, si $\frac{P}{P'}$ occupe un rang assez éloigné; donc la différence entre deux réduites $\frac{P}{P'}$, $\frac{U}{U'}$, distantes l'une de l'autre d'un nombre déterminé de rangs, peut également devenir moindre qu'une quantité donnée; donc on pourra satisfaire à l'inégalité $y_n - y_{n+1} < \delta$ »

Je suis content d'avoir laissé à M. Guilmin l'occasion de chercher une démonstration.

La note *incriminée* contient la formule :

$$y_n = \frac{Py_{n-1} + N}{P'y_{n-1} + N'},$$

dans laquelle P, P', N, N' sont *des constantes*. M. Guilmin trouve plus commode d'employer cette autre formule :

$$y_{n+1} = \frac{Py_1 + N}{P'y_1 + N'},$$

dans laquelle P, P′, N, N′ sont *des variables* : permis à lui.

Enfin, M. Guilmin enlève quelques mots et quelques virgules à cette malencontreuse note ; il supprime quelques calculs ; il appelle A ce que j'avais appelé Q, etc. Ces *perfectionnements* lui permettent de démontrer en deux pages une partie de ce que j'avais démontré en trois pages et demie. Ici, je n'ai rien à dire : car l'économie est une belle chose !

Agréez, mon cher M. Terquem, l'assurance de mes sentiments affectueux et dévoués.

E. Catalan.

21 avril 1845.