

GÉRONO

Des racines infinies des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 85-93

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__85_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DES RACINES INFINIES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES.

(Suite d'un premier article. Voy. t. III, pages 32... 40.)

—

4. Dans la discussion complète d'une équation à deux inconnues $F(x, y) = 0$, on peut aussi avoir à considérer des solutions composées d'une valeur infinie et réelle pour l'une des inconnues, y , et d'une valeur finie et réelle pour l'autre x .

Quand je dirai : l'équation proposée admet la solution $x = \alpha, y = \infty$ (α étant une quantité réelle et finie), voici ce qu'il faudra sous-entendre :

On peut donner à l'inconnue x une valeur $\alpha + h$ ou $\alpha - h$, assez peu différente de α pour que l'autre inconnue y ait une valeur correspondante, ϵ , plus grande que tout nombre déterminé δ ; et si l'on fait converger la valeur de x vers α , par la diminution progressive de h , la valeur correspondante de y ira continuellement en augmentant à partir de ϵ

C'est à ce genre de solutions que se rapporte, en définitive, la détermination des asymptotes rectilignes aux courbes algébriques.

Dans la recherche des solutions de la forme $x = \alpha, y = \infty$, j'ordonnerai l'équation proposée suivant les puissances décroissantes de y , en l'écrivant de cette manière :

$$Ay^m + By^n + Cy^p + \dots = 0.$$

Je supposerai que A, B, C, etc. soient des fonctions entières de x , premières entre elles, et à coefficients numériques réels et finis. Aucune valeur substituée à x ne pourra annuler à la fois toutes les fonctions A, B, C, etc., puisqu'elles sont débarrassées de tout diviseur commun.

5. L'équation $Ay^m + By^n + Cy^p + \dots = 0$ ne peut admettre la solution $x = \alpha, y = \infty$, qu'autant que la substitution de α à x annule le coefficient A du premier terme. Car si A ne se réduit pas à zéro, les racines de l'équation à une seule inconnue y , obtenue par la substitution dont il s'agit, ont évidemment une limite supérieure que l'on peut assigner. Ainsi, l'équation n'admet aucune solution de la forme indiquée, lorsque le coefficient A est indépendant de x ; et il en est encore de même si, A contenant x , l'équation $A = 0$ n'a aucune racine réelle.

Mais il n'en faut pas conclure que toute racine réelle α de $A = 0$, donne à l'équation proposée la solution $x = \alpha, y = \infty$. Pour écarter cette conclusion, il suffira de prendre comme exemple les équations :

$$(x - 1)^2 y^6 + (x^2 + 1) y^2 + 1 = 0$$

$$(x - 1)^4 y^4 + (x^2 + 1) y^2 - 1 = 0.$$

Le coefficient de la plus haute puissance de y de chacune de ces deux équations se réduit à zéro lorsque $x = 1$; et, cependant, si l'on donne à x des valeurs plus grandes ou plus petites, aussi peu différentes de l'unité que l'on voudra, les

valeurs correspondantes de y seront , dans la première équation , toujours imaginaires ; et dans la seconde , toujours moindres que l'unité.

Pour reconnaître quelles sont les racines α réelles et finies de $A = 0$, qui donnent à l'équation proposée $Ay^m + By^n + Cy^p + \dots = 0$, des solutions de la forme $x = \alpha$, $y = \infty$, je distinguerai deux cas : suivant que le nombre des racines de $A = 0$, égales à α , est impair ou pair.

6. Si l'équation $A = 0$ a un nombre impair de racines égales au nombre α réel et fini , l'équation $Ay^m + By^n + Cy^p + \dots = 0$ admettra nécessairement la solution $x = \alpha$, $y = \infty$.

C'est-à-dire que

1° En remplaçant x par $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ (h étant un nombre réel suffisamment petit) , l'équation à une seule inconnue $Ay^m + By^n + Cy^p + \dots = 0$, aura au moins une racine réelle plus grande que tout nombre donné δ .

2° Si l'on fait converger vers α la valeur $\alpha + h$, ou $\alpha - h$, substituée à x , la valeur correspondante de y ira toujours en augmentant.

Ce sont les deux points qu'il faut établir.

La valeur α qui , substituée à x , annule A , peut de même annuler quelques-uns des coefficients suivants B , C , etc. ; mais tous ces coefficients ne sont pas à la fois réductibles à zéro : je nomme A' le premier des coefficients que α n'annule pas ; B' , C' , etc. ceux qui peuvent suivre A' ; et h un nombre réel assez petit pour que l'équation $A' = 0$ n'ait aucune racine comprise entre $\alpha + h$ et $\alpha - h$. Et de plus , je suppose qu'en faisant varier x depuis $\alpha + h$ jusqu'à $\alpha - h$, la fonction A soit seulement réduite à zéro par $x = \alpha$.

D'après la notation indiquée , l'équation proposée est

$$Ay^m + By^n + \dots + A'y^r + B'y^s + \dots = 0.$$

Afin d'apporter plus de précision dans l'examen des valeurs

et des signes que prend le premier membre, lorsque x et y reçoivent différentes valeurs, je considérerai d'abord séparément chacun des deux polynômes $A'y^r + B'y^s + \dots$, et $Ay^m + By^n + \text{etc.}$

On peut donner à l'inconnue y une valeur y' assez grande pour que, en faisant varier x depuis $\alpha + h$ jusqu'à $\alpha - h$, le polynôme $A'y^r + B'y^s + \text{etc.}$ ait constamment le signe de son premier terme $A'y^r$. En effet, soient a' la plus petite valeur que prend A' , et M le maximum de $B', C', \text{etc.}$, lorsque x varie depuis $\alpha + h$ jusqu'à $\alpha - h$: il suffira, pour satisfaire à la condition énoncée, de remplacer y par un nombre y' au moins égal à $\frac{M}{a'} + 1$ (*). La même condition étant remplie par tout nombre plus grand que $\frac{M}{a'} + 1$, je supposerai y' au moins égal au nombre donné δ .

En substituant y' à y dans le second polynôme $Ay^m + By^n + \text{etc.}$, et faisant varier x depuis $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ jusqu'à α , on donnera à ce polynôme des valeurs absolues aussi petites que l'on voudra : car, lorsque $x = \alpha$, tous les coefficients A, B, \dots , s'annulent à la fois (**). Pour des valeurs de h suffisamment petites, on aura toujours, en valeurs absolues, l'inégalité $Ay'^m + By'^n + \dots < A'y'^r + B'y'^s + \dots$. En effet, nommons N le minimum des valeurs de $A'y'^r + B'y'^s + \dots$, correspondantes aux valeurs de x comprises entre $\alpha + h$ et $\alpha - h$, l'inégalité indiquée existera nécessairement

(*) Car toutes les équations à une seule inconnue, y , déterminées par la substitution des valeurs attribuées à x , auront leur premier terme plus grand que la somme de tous les autres termes, lorsqu'on y remplacera y par $\frac{M}{a'} + 1$, ou bien par une valeur plus grande. C'est un principe démontré dans tous les traités d'algèbre.

(**) Les fonctions A, B, \dots , admettant le diviseur $x - \alpha$ à des puissances $m', n', \text{etc.}$, prendront la forme $ah^{m'}, bh^{n'}, \text{etc.}$, lorsqu'on y substituera $\alpha + h$ à x ; c'est pourquoi le polynôme $Ay'^m + By'^n + \dots$ devient aussi petit que l'on veut, en donnant à h une valeur suffisamment petite.

dès que $Ay'^m + By'^n + \dots$ deviendra moindre que N .

Enfin, je ferai encore observer qu'il est possible, en disposant convenablement du signe de h , de donner aux coefficients A et A' des signes contraires. Si, par exemple, les valeurs de x comprises entre $\alpha + h$ et α rendent ces deux coefficients positifs : pour les valeurs de x comprises entre $\alpha - h$ et α , le premier deviendra négatif et l'autre ne changera pas de signe; ils auront donc alors des signes contraires. La possibilité de satisfaire à cette dernière condition tient, comme on voit, à ce que l'équation $A = 0$, a un nombre impair de racines égales à α .

Cela posé, remplaçons y par y' , et x par $\alpha \pm h$, dans le premier membre de l'équation $Ay^m + By^n + \dots + A'y^r + B'y^s + \dots = 0$. En disposant du signe et de la grandeur de h , comme nous venons de l'indiquer, les termes Ay'^m , $A'y'^r$ auront des signes contraires, et la valeur absolue du polynôme $Ay'^m + By'^n + \dots$, sera moindre que celle du polynôme $A'y'^r + B'y'^s + \dots$; alors le premier membre de l'équation proposée aura un signe contraire à celui de son premier terme Ay^m .

Puis, sans rien changer à la valeur ni au signe de h , faisons croître y à partir de y' , jusqu'à ce que le premier membre de l'équation prenne le signe de son premier terme, et conserve ce signe pour toute valeur plus grande de y . Par cette augmentation progressive de la variable y , le premier membre de l'équation s'annulera au moins une fois, puisqu'il change de signe dans l'intervalle des valeurs attribuées à y . Ainsi l'équation en y aura au moins une racine réelle ϵ plus grande que y' . On peut d'ailleurs prendre, pour la valeur de ϵ , la plus grande des racines de l'équation. Donc,

1° En remplaçant x par $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ (h étant un nombre réel suffisamment petit) l'équation proposée $Ay^m + By^n$

+ etc., = 0, aura au moins une racine réelle, ϵ , plus grande que le nombre donné δ .

Si plusieurs valeurs différentes de h correspondent à $y = \epsilon$, je prendrai pour h la plus petite de toutes. Ainsi $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ représentera, parmi les valeurs de x qui peuvent correspondre à $y = \epsilon$, celle qui diffère le moins de α . Alors, en faisant diminuer h , le polynôme $A\epsilon^m + B\epsilon^n + \dots + A'\epsilon^r + B'\epsilon^s + \dots$, qui était annulé, reprendra immédiatement le signe du terme $A'\epsilon^r$, pour $h' < h$, quelque petite que soit d'ailleurs la diminution de h (*). Et comme, en augmentant la valeur de y à partir de ϵ , on pourra de nouveau donner au polynôme $Ay^m + By^n + \dots + A'y^r + B'y^s + \dots$, le signe de son premier terme Ay^m , l'équation admettra, pour $h' < h$, une racine $\epsilon' > \epsilon$. D'où je conclus que

2° Si l'on fait converger vers α , la valeur $\alpha + h$ ou $\alpha - h$ attribuée à x , la valeur correspondante de y ira toujours en augmentant.

Et, par conséquent, l'équation proposée admettra réellement la solution $x = \alpha$, $y = \infty$.

7. En général, l'équation proposée admettra toujours pour l'inconnue y une valeur infinie réelle, correspondante à la valeur réelle et finie α de l'autre inconnue x , qui annule le coefficient A de la plus haute puissance de y : lorsque, en attribuant à x une valeur $\alpha + h$ ou $\alpha - h$, suffisamment rapprochée de α , il sera possible de donner des signes contraires au premier terme Ay^m de l'équation et au premier des termes $A'y^r$ dont le coefficient A' n'est pas annulé par la substitution de α à x (**).

(*) Si la substitution de h' à h donnait au polynôme un signe contraire à celui du terme $A'\epsilon^r$, il y aurait entre h' et 0 une valeur $h'' < h'$ correspondante à $y = \epsilon$; car lorsque $h = 0$, le polynôme a évidemment le signe du terme $A'\epsilon^r$.

(**) Je ne veux pas dire que cette condition soit indispensable, elle est seulement suffisante. J'examinerai plus loin (n. 9) comment, lorsqu'elle n'est pas remplie, on peut reconnaître si la valeur de y correspondante à $x = \alpha$ est encore l'infini réel.

C'est là une conséquence évidente de la démonstration qui vient d'être donnée n° 6.

Que si nous avons considéré α comme une racine simple, ou d'un ordre de multiplicité impair, de l'équation $A = 0$, c'est parce qu'il est alors toujours possible de faire prendre des signes contraires aux deux termes $Ay^m, A'y^r$, en disposant convenablement des signes de h et de y .

Dans chaque cas particulier, il sera facile de distinguer quels sont les signes de h et de y qui donnent aux deux termes $Ay^m, A'y^r$ des signes différents. Cette observation est utile pour la construction des courbes; j'en montrerai immédiatement l'utilité, en appliquant le principe du n° 6 à la recherche des asymptotes, parallèles à l'axe des ordonnées, d'une courbe algébrique.

8. Pour reconnaître si l'équation

$$Ay^m + By^n + \text{etc.} = 0$$

représente une courbe ayant une ou plusieurs asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées, il faut précisément savoir si cette équation admet des solutions de la forme $x = \alpha$, $y = \infty$, en définissant, comme nous l'avons fait, les solutions de cette forme; car à chacune de ces solutions correspond une branche de courbe qui a pour asymptote la droite $x = \alpha$; et réciproquement, à chacune des asymptotes, $x = \alpha$, parallèles à l'axe des ordonnées correspond une solution de la forme $x = \alpha$, $y = \infty$.

D'après cela, pour déterminer les asymptotes dont il s'agit, on cherche d'abord les racines réelles de l'équation à une seule inconnue $A = 0$, et il reste ensuite à examiner si les valeurs de x ainsi obtenues donnent à y des valeurs réelles infinies.

Lorsque la racine obtenue α est simple ou multiple d'ordre impair, une des valeurs correspondantes de y est toujours

réelle infinie (n° 6) ; donc l'équation proposée représente une courbe dont une branche au moins a pour asymptote la droite $x = \alpha$.

Afin que cette première donnée puisse servir à construire une partie de la courbe avec quelque précision, il faut encore savoir de quel côté de l'axe des abscisses et de la droite $x = \alpha$ les branches de la courbe deviennent asymptotes à cette droite.

A cet effet, je substitue à x la valeur α dans les coefficients successifs B, C, etc., jusqu'à ce que je parvienne à un terme $A'y^r$ dont le coefficient A' ne soit pas annulé par la substitution de α . Ce coefficient A' se réduira à un nombre r' dont le signe est déterminé.

Puis, après avoir divisé le coefficient A du premier terme Ay^m par la plus haute puissance de $x - \alpha$ qui entre comme facteur dans ce coefficient, je remplace encore x par α dans le quotient obtenu ; il en résulte un nombre m' positif ou négatif.

Supposons d'abord que les deux nombres r' , m' aient le même signe.

Les termes $A'y^r$, Ay^m prendront des signes contraires lorsqu'on fera varier x depuis $\alpha - h$ jusqu'à α , en donnant de plus à y des valeurs positives, par conséquent, la droite $x = \alpha$ sera asymptote à une branche de la courbe située du côté des ordonnées positives ; et si α est positif, en laissant aux axes la disposition ordinaire, cette branche sera située à gauche de l'asymptote $x = \alpha$.

Lorsque les exposants r , n de y dans les termes $A'y^r$, Ay^m seront tous deux pairs ou tous deux impairs, ces termes prendront encore des signes contraires pour des valeurs négatives de y , les valeurs de x étant toujours comprises entre $\alpha - h$ et α . Ainsi, la droite $x = \alpha$ est encore asymptote à une branche de la courbe située au-dessous de l'axe des x , cette

nouvelle branche sera , comme la première , dirigée à gauche de l'asymptote.

Mais si l'un des deux exposants r, n est pair et l'autre impair, en donnant à y des valeurs négatives, il faudra faire varier x depuis $\alpha + h$ jusqu'à α , pour que les termes $Ay^m, A'y^r$ prennent des signes contraires ; alors les deux branches sont situées de différents côtés de l'asymptote.

On déterminera de même la situation relative de la droite $x = \alpha$ et des branches auxquelles elle est asymptote, dans le cas particulier où les deux nombres r' et m' ont des signes contraires.

G.

(*La fin prochainement.*)
