NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MIDY

Note sur les centres d'homologie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 77-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__77_1>

NOTE

SUR

LES CENTRES D'HOMOLOGIE.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

Soient dans un plan deux figures semblables, d'ailleurs quelconques, ABC.... et *abc*...., (*fig.* 11), dont les côtés soient parallèles et de même sens ; ou bien ABC.... et $a'b'c'$.... dont les côtés soient parallèles et de sens contraires.

On sait que les droites Aa, Bb, Cc, etc., ou Aa', Bb', Cc', etc., qui joignent deux à deux leurs points homologues, concourent en un même point I, situé sur le prolongement de ces droites dans la première hypothèse, et entre les points homologues considérés dans la seconde.

Ce point a été nommé centre de similitude ou d'homologie, direct dans le premier cas, inverse dans le second. Comme la théorie des centres d'homologie est encore peu répandue, nous croyons utile d'exposer ici quelques-unes des propriétés de ces centres qui ne nous paraissent pas suffisamment éclaircies.

Nommons d la distance de deux côtés homologues et parallèles des deux figures, X et x les distances du point I à ces droites, et $\frac{L}{l}$ le rapport d'homologie, l'on aura dans le premier cas

$$X = \frac{dL}{L - l} \text{ et } x = \frac{dl}{L - l},$$

et dans le second :

$$X = \frac{dL}{L + l} \text{ et } x = \frac{dl}{L + l}.$$

On voit par ces valeurs que si l'une des deux figures vient à se mouvoir parallèlement à elle-même dans le plan, de manière que la distance d demeure constante, le centre I se mouvra aussi sur une parallèle aux deux côtés homologues considérés, et pourra prendre sur cette parallèle telle position que l'on voudra.

D'ailleurs, si l'on fait varier d, la distance de cette parallèle à chacun des deux côtés homologues pourra devenir aussi grande et aussi petite que l'on voudra ; d'où il suit qu'il n'est pas de point du plan qui ne puisse être considéré comme le centre d'homologie de deux figures semblables et parallèles données placées convenablement dans ce plan.

Si l'on fait tourner l'un des deux systèmes *abc*..., je suppose, autour du point I, de sorte que chaque sommet décrive un arc de cercle du même nombre de degrés dont ce point soit le centre, alors les droites A*a*, B*b*, B*c*, etc. (*fig.* 12) ne passeront plus par le point I ; mais le point I sera toujours, comme dans la première figure, le sommet commun des triangles semblables ayant pour bases les côtés ou lignes homologues AB et *ab*, AC et *ac*, BC et *bc*, etc. ; il sera encore le point unique du plan où deux points homologues des deux systèmes seront confondus en un seul, et l'on aura les proportions suivantes :

$$\mathrm{IA}:\mathrm{I}a::\mathrm{AB}:ab$$
$$\mathrm{IB}:\mathrm{I}b::\mathrm{AB}:ab$$
$$\mathrm{IC}:\mathrm{I}c::\mathrm{AB}:ab$$

Etc.

Réciproquement, si le point I est tel que deux des proportions précédentes aient lieu, il est facile de reconnaître que toutes les autres auront lieu également, et que par suite le point I sera le centre d'homologie des deux figures.

Supposons maintenant que la figure *abc*... tourne sur *ab* comme axe et vienne prendre, dans le plan, de l'autre côté de *ab*, la position symétrique *abc'*..., etc.

S'il existe un point K entre les droites AB et *ab*, tel que les triangles KAB, K*ab* soient semblables, les triangles KAC et K*ac*, KBC et K*bc'*, etc., le seront aussi, et l'on aura les proportions suivantes :

$$\mathrm{KA}:\mathrm{K}a::\mathrm{AB}:ab$$
$$\mathrm{KB}:\mathrm{K}b::\mathrm{AB}:ab$$
$$\mathrm{KC}:\mathrm{K}c'::\mathrm{AB}:ab,$$

Etc.

C'est-à-dire que le point K sera le centre d'homologie par symétrie des polygones symétriquement semblables ABC... et abc'...

Cela posé, je vais démontrer que deux systèmes de points, directement, inversement ou symétriquement semblables dans un plan, qui ont deux droites données pour côtés homologues, ont toujours un centre d'homologie et ne peuvent en avoir qu'un seul, quelles que soient la grandeur et la position de ces droites dans le plan.

On sait que dans un plan le lieu des points dont les distances à deux points donnés A et B (*fig.* 13) sont dans le rapport donné de p à q, est une circonférence de cercle dont le centre, en supposant $p > q$, est au delà du point B, sur le prolongement de AB, et que si O est le centre de cette circonférence, et I le point où elle coupe AB, l'on a

$$\mathrm{OI} = \frac{\mathrm{AI} \times \mathrm{IB}}{\mathrm{AI} - \mathrm{IB}} \quad \text{et} \quad \mathrm{OB} = \frac{\mathrm{IB}^2}{\mathrm{AI} - \mathrm{IB}}.$$

En nommant l la longueur de AB, r le rayon du cercle et d la distance OB, les expressions précédentes deviennent

$$r = \frac{lpq}{p^2 - q^2}; \qquad d = \frac{lq^2}{p^2 - q^2}.$$

Soit maintenant un quadrilatère quelconque ABba (*fig.* 14) dont les côtés Aa, Bb se rencontrent en O.

Je dis que la circonférence, lieu des points dont les distances aux points A et a sont dans le rapport de AB:ab, et la circonférence, lieu des points dont les distances aux points B et b sont aussi dans le rapport de AB:ab, se coupent toujours.

En effet, soit K le centre de la première et L celui de la seconde; nommons p et q les deux côtés AB et ab, et soit $p > q$; désignons les distances OA, Oa, OB, Ob respectivement par α, α', β, β'; les rayons des deux circonférences par R et r, et les distances OK et OL par k et l, nous aurons d'abord

$$R = \frac{(\alpha - \alpha')pq}{p^2 - q^2} \quad \text{et} \quad r = \frac{(\beta - \beta')pq}{p^2 - q^2},$$

puis

$$aK = \frac{(\alpha - \alpha')q^2}{p^2 - q^2},$$

par suite

$$OK = k = \frac{\alpha'(p^2 - q^2) - (\alpha - \alpha')q^2}{p^2 - q^2},$$

ou réduisant

$$k = \frac{\alpha' p^2 - \alpha q^2}{p^2 - q^2};$$

de même

$$OL = l = \frac{\beta' p^2 - \beta q^2}{p^2 - q^2}.$$

Cela posé, appelons θ l'angle AOB et d la distance KL des deux centres. Le triangle OKL donnera

$$d^2 = k^2 + l^2 - 2kl \cos\theta.$$

Il faut donc, si la proposition énoncée est vraie, que l'on ait à la fois

$$d < R + r \quad \text{et} \quad d > R - r,$$

ou, ce qui est l'équivalent, que l'on ait les deux inégalités suivantes :

$$k^2 + l^2 - 2kl\cos\theta < (R+r)^2 \qquad (1)$$

$$k^2 + l^2 - 2kl\cos\theta > (R-r)^2. \qquad (2)$$

Or

$$R + r = \frac{pq(\alpha + \beta - \alpha' - \beta')}{p^2 - q^2}$$

et

$$R - r = \frac{pq(\alpha - \beta - \alpha' + \beta')}{p^2 - q^2}.$$

Remplaçons dans (1) les quantités k, l et $R+r$ par leurs valeurs, il viendra

$$(\alpha' p^2 - \alpha q^2)^2 + (\beta' p^2 - \beta q^2)^2 - 2\,(\alpha' p^2 - \alpha q^2)\,(\beta' p^2 - \beta q^2)\cos\theta$$
$$< p^2 q^2 (\alpha + \beta - \alpha' - \beta')^2\,; \qquad (3)$$

ou, développant et ordonnant,

$$p^4(\alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha'\beta'\cos\theta) + q^4(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta) - p^2q^2\,[\,2\alpha\alpha' +$$
$$+ 2\beta\beta' - 2(\alpha'\beta + \alpha\beta')\cos\theta] < p^2q^2[\alpha^2 + \beta'^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 -$$
$$- 2\alpha(\alpha' + \beta') - 2\beta\,(\alpha' + \beta') + 2\alpha\beta + 2\alpha'\beta']. \qquad (4)$$

Remarquons que l'on a

$$p^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta$$
$$\text{et}\ \ q^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha'\beta'\cos\theta\,,$$

et que par suite le facteur p^2q^2 est commun à tous les termes. Alors en le supprimant et en remplaçant p^2 et q^2 par leurs valeurs, il viendra, en effaçant les termes communs aux deux membres et divisant par 2, l'expression suivante :

$$\cos\theta\,(\alpha\beta' + \beta\alpha' - \alpha\beta - \alpha'\beta') < -(\alpha\beta' + \beta\alpha' - \alpha\beta - \alpha'\beta')\,,$$

ou, en passant tout dans le premier membre,

$$(\cos\theta + 1)\,(\alpha\beta' + \beta\alpha' - \alpha\beta - \alpha'\beta') < 0. \qquad (5)$$

Or on passe de l'inégalité (1) à l'inégalité (2), en changeant le signe de r ; ce qui revient, en remontant à l'expression de cette quantité, à changer le signe de β et de β' dans le second membre de (4).

La seconde condition équivaut donc à

$$(\cos\theta - 1)\,(\alpha\beta' + \beta\alpha' - \alpha\beta - \alpha'\beta') > 0. \qquad (6)$$

Or quel que soit le signe de $\cos\theta$, $\cos\theta + 1$ est toujours positif et $\cos\theta - 1$ toujours négatif. Pour que les inégalités (5) et (6) soient satisfaites, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' > \alpha\beta' + \beta\alpha'\,, \qquad (7)$$

ou bien que la somme

$$\text{aire } OAB + \text{aire } Oab > \text{aire } OAb + \text{aire } OBa.$$

ou, en supprimant 2 Oab communs aux deux membres, que

$$ABb + abA > abA + abB,$$

ou enfin que $$ABb > abB.$$

Or cette dernière inégalité est manifeste. Donc les deux circonférences se coupent. Donc en revenant à la proposition primitive, quelle que soit la position des figures semblables directes, inverses ou symétriques, le centre d'homologie existe toujours. Mais les circonférences R et r se coupent en deux points, et nous avons vu que le centre cherché était unique pour les deux systèmes considérés. Ainsi l'un des deux points d'intersection trouvés, toujours facile à choisir d'après l'espèce de similitude donnée, conviendra seul à la question. L'autre sera lié au premier par les considérations que nous avons précédemment exposées.

Pour mettre cette dernière assertion hors de doute, examinons les cas particuliers où les deux systèmes sont parallèles.

Dans cette hypothèse, soient AB et ab (*fig* 15) deux côtés homologues des deux figures. Prolongeons Aa et Bb jusqu'a leur rencontre en I. Tirons Ab et Ba qui se coupent en i, puis menons par les points I et i des parallèles $m'm''$, $m'''m^{\text{IV}}$ a AB, et par ces mêmes points les perpendiculaires IK, ik sur cette même droite. Les points I et i seront les centres d'homologie cherchés suivant que les deux systèmes auxquels appartiennent les lignes homologues AB et ab seront directs ou inverses.

Les points I et m', I et m'' seront conjugues harmoniques par rapport à Aa et Bb, et les points i et m''', i et m^{IV} le seront aussi par rapport à Ab et Ba. Les circonférences decrites sur $\mathrm{I}m'$ et $\mathrm{I}m''$ comme diamètres se couperont en K, et celles décrites sur im''' et im^{IV} se couperont en k.

Donc, indépendamment des proportions

$$\mathrm{IA} : \mathrm{I}a :: \mathrm{IB} : \mathrm{I}b :: \mathrm{AB} : ab$$
$$i\mathrm{A} : ib :: i\mathrm{B} : ia :: \mathrm{AB} : ab,$$

on aura encore celles-ci :

$$\mathrm{KA} : \mathrm{K}a :: \mathrm{KB} : \mathrm{K}b :: \mathrm{AB} : ab$$
$$k\mathrm{A} : kb :: k\mathrm{B} : ka :: \mathrm{AB} : ab.$$

Donc les triangles KAB et Kab sont semblables, ainsi que les triangles IAB et Iab, et les triangles kAB et kab le sont aussi, de même que les triangles iAB et iab. Le point K a donc réellement, entre les droites AB et ab, la position analogue à celle du point I au-dessus de ces droites.

Il en est de même du point k relativement au point i. Les points I et K, i et k sont donc des centres d'homologie distincts correspondant aux diverses hypothèses que l'on peut faire sur le genre de similitude des systèmes auxquels appartiennent les côtés AB et ab. On conçoit que quoique nous n'ayons pris qu'un cas particulier, des considérations analogues auraient lieu dans le cas général.

1^er^ *Corollaire.* Nommons C la première circonférence décrite du rayon R, ou sur Aa (*fig.* 14). Désignons par C′, C″, C‴, etc. les circonférences analogues décrites sur Bb, Cc, Dd, etc. · il suit de ce qui précède que C, C′, C″, C‴, etc. auront une corde commune, ou se couperont toutes aux mêmes points.

2^e^ *Corollaire.* Si $p = q$, c'est-à-dire si les systèmes semblables deviennent égaux, les rayons R, R′, R″, etc. deviendront infinis; les circonférences C′, C″, C‴, etc. se changegeront en des droites perpendiculaires sur le milieu des droites Aa, Bb, Cc, etc.; d'où il suit que ces perpendiculaires iront toutes concourir en un même point.

3^e^ *Corollaire.* Soient deux droites AN, AN′ (*fig.* 16) issues du point A et terminées à la droite OX. Faisons $N'n' = Nn$ et $n'H' = nA$. En conséquence du corollaire (2), les perpendiculaires sur les milieux des droites AH', nn', NN' se rencontreront en un même point. Si l'on fait tourner AN' sur le point A, et qu'on suppose les droites $N'n'$, $n'H'$ invariables de grandeur, quand le point N' se rapprochera du point N, le point n' décrira un arc de conchoïde. A la limite, ou quand les points N' et N se confondront, les points H' et A se confondront aussi. La droite nn' deviendra tangente à la courbe, et la perpendiculaire sur cette droite deviendra normale. Cette normale passe donc alors par le point de concours des perpendiculaires en N et en A sur les droites ON et NA. Ce qui fournit un moyen facile de mener par un point de la conchoïde une tangente à cette courbe.