Nouvelles annales de mathématiques

E. Desmarets

Question d'examens. De tous les triangles inscrits dans une ellipse et dont un côté passe par un foyer, quel est le triangle maximum ?

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 596-601

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__596_1>

QUESTION D'EXAMENS.

De tous les triangles inscrits dans une ellipse et dont un côté passe par un foyer, quel est le triangle maximum?

PAR M. E. DESMARETS,
ancien élève de l'École polytechnique.

(*Fig.* 79.) Soient 1° F le foyer, 2° GN la direction que doit prendre le côté cherché, il est clair que la condition de maximum imposée au triangle exige que la tangente à l'ellipse au point M soit parallèle à la ligne GN.

Soient 1° oX le diamètre parallèle à la direction GN; 2° oY

(*) C'est une belle généralisation du théorème de M. Dupin (*Développements de Géométrie*, p. 31), TO est égal au demi-diamètre conjugué à celui qui passe par T; le point T décrit une portion de droite, lorsque les trois points A, B, T et le centre sont sur un même cercle. Le lien du point O est une circonférence. Tm.

le diamètre conjugué du précédent ; 3° α, α' les angles de ces diamètres avec le grand axe ; 4° $oF = c = \sqrt{a^2 - b^2}$, on aura :

$a_1^2 y^2 + b_1^2 x^2 = a_1^2 b_1^2$ pour l'équation de l'ellipse ;

VN $\times$ NM $\sin(\alpha' - \alpha)$ pour la mesure du triangle cherché.

1° Le facteur VN sera obtenu en remplaçant, dans l'équation de l'ellipse, y par la valeur $\dfrac{c \sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}$ qui appartient à oV ; on a donc :

$$\overline{VN}^2 = \frac{a_1^2 b_1^2 \overline{\sin}^2(\alpha' - \alpha) - a_1^2 c_1^2 \overline{\sin}^2 \alpha}{b_1^2 \overline{\sin}^2(\alpha' - \alpha)}.$$

Si, dans cette expression, on remplace $a'b' \sin(\alpha' - \alpha)$ par leurs valeurs déduites des relations connues

$$a_1^2 b_1^2 \overline{\sin}^2(\alpha' - \alpha) = a^2 b^2, \quad a_1^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \overline{\sin}^2 \alpha + b^2}, \qquad \text{(A)}$$

on obtient la valeur de VN en fonction des quantités connues a, b, c et de l'indéterminée $\sin\alpha$,

$$VN = \frac{ab^2}{c^2 \overline{\sin}^2 \alpha + b^2}.$$

2° Le produit VN $\sin(\alpha' - \alpha)$ sera obtenu en se servant de l'égalité

$$VM = b' + \frac{c \sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Cette égalité est transformée par l'intervention des relations (A) en

$$VM \sin(\alpha' - \alpha) = c \sin\alpha + \sqrt{c^2 \overline{\sin}^2 \alpha + b^2} \, ;$$

la surface du triangle est donc, après avoir représenté $\sin\alpha$ par z,

$$GNM = ab^2 \left(\frac{cz + \sqrt{c^2 z^2 + b^2}}{c^2 z^2 + b^2} \right).$$

et on doit chercher le maximum de l'expression

$$\frac{cz + \sqrt{c^2z^2 + b^2}}{c^2z^2 + b^2}. \qquad \text{(C)}$$

La dérivée est

$$\frac{(c^2z^2 + b^2)\left(c + \frac{c^2z}{\sqrt{c^2z^2+b^2}}\right) - \left(cz + \sqrt{c^2z^2+b^2}\right)2cz}{(c^2z^2+b^2)^2};$$

ou, après réduction,

$$\frac{c}{(c^2z^2+b^2)^2}\left(-c^2z^2 + b^2 - cz\sqrt{c^2z^2+b^2}\right). \qquad \text{(D)}$$

Le polynôme $-c^2z^2 + b^2 - cz\sqrt{c^2z^2+b^2}$ égalé à zéro donne

$$z \text{ ou } \sin\alpha = \pm\frac{b}{c\sqrt{3}}.$$

Or l'ellipse donnée peut présenter trois circonstances :

$$b < c\sqrt{3}, \qquad b = c\sqrt{3}, \qquad b > c\sqrt{3}.$$

1° Si on a $b < c\sqrt{3}$, ou $c > \frac{a}{2}$, l'ellipse est sensiblement allongée, et la valeur analytique qui donne le maximum étant inférieure à l'unité, l'angle α existe ; et la valeur de $\sin\alpha$, substituée dans la mesure (B) du triangle, donne :

$$\text{GNM} = \frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

Or cette valeur est celle du triangle maximum général inscrit dans l'ellipse : on peut, en effet, reconnaître que la droite GN est le côté de ce dernier triangle ; cette droite, menée avec l'inclinaison caractérisée par la condition $\sin\alpha = \frac{b}{c\sqrt{3}}$, partage en deux parties égales le demi-diamètre conjugué de celui qui est parallèle à cette droite : on a alors, en effet,

$$oV = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)} = \frac{b_1}{2},$$

ou, par l'emploi des relations (A),

$$2c\sin\alpha = \sqrt{c^2\sin^2\alpha + b^2},$$

égalité exacte, si on remplace $\sin\alpha$ par $\dfrac{b}{c\sqrt{3}}$: ainsi dans les ellipses éloignées de l'état circulaire, le triangle cherché est le triangle maximum général inscrit. La même circonstance se reproduit lorsque l'on a $b = c\sqrt{3}$, et la ligne GN est alors perpendiculaire au grand axe.

2° Si l'on a $b > c\sqrt{3}$, l'ellipse donnée se rapproche de l'état circulaire, la condition analytique du maximum $z = \dfrac{b}{c\sqrt{3}}$ est étrangère à la question ; or le maximum relatif est alors donné par la condition $z = 1$ ou $\alpha = 90°$; il suffit, en effet, de démontrer que la fonction (C) *croît* pour toutes les valeurs de z inférieures à l'unité, ou que la dérivée (D) de cette fonction reste positive pour les valeurs $z < 1$. Or on a toujours :

$$-c^2z^2 + b^2 - cz\sqrt{c^2z^2 + b^2} > 0, \qquad \text{(E)}$$

inégalité qui peut être mise sous la forme

$$cz\sqrt{c^2z^2 - b^2} < b^2 - c^2z^2 ;$$

or, lorsque l'on a $z < 1$ et $b > c\sqrt{3}$, les deux membres de cette inégalité étant positifs, on peut élever au carré, et on a, après réduction :

$$3c^2z^2 < b^2,$$

inégalité qui est vérifiée dans les conditions actuelles.

Ainsi, lorsque l'on a $b > c\sqrt{3}$, la droite qui donne le triangle maximum relatif est perpendiculaire au grand axe, et la mesure de ce triangle est :

$$\frac{b^2(c + a)}{a}. \qquad \text{(F)}$$

On peut d'ailleurs démontrer que ce maximum relatif tend à devenir égal, mais est toujours inférieur au maximum général $\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$. En effet, la condition

c ou $\sqrt{a^2-b^2} =$ ou $< \frac{a}{2}$ qui correspond à $b > c\sqrt{3}$,

donne le résultat suivant ·

$$b^2 = > 3c^2,$$

ou
$$b^2 = > \frac{3a^2}{4},$$

$$b = > \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{b\left(\frac{a}{2}+a\right)}{a} = > \frac{3a\sqrt{3}}{4}.$$

Or, puisque l'on a $c =$ ou $< \frac{a}{2}$, si on remplace dans le premier membre de cette dernière inégalité $\frac{a}{2}$ par c, ce premier membre doit devenir inférieur ou, au plus, égal au deuxième ; on a donc :

$$b\left(\frac{c+a}{a}\right) = < \frac{3a\sqrt{3}}{4}.$$

De là,

$$b^2\left(\frac{c+a}{a}\right) = < \frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

On pourrait examiner les conditions nécessaires pour que le triangle inscrit, dont deux côtés passent par les foyers, soit maximum ; mais il est clair que ce triangle est celui que l'on obtient en unissant le sommet du petit axe aux deux foyers.

Note. Un polygone d'aire maximum absolu, d'un nombre de côtés donné, inscrit dans une ellipse, est la projection du polygone régulier d'un même nombre de côtés et inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection ; les côtés du polygone inscrit dans l'ellipse touchent donc une seconde ellipse concentrique semblable et semblablement placée. Si le côté du polygone doit passer par un point fixe, il y a trois cas à distinguer ; si le point fixe est hors de la seconde ellipse, il y a deux solutions ; si ce point est sur l'ellipse, les deux solutions se réduisent à une seule ; si le point est dans l'intérieur de l'ellipse, le problème est impossible pour le maximum absolu ; mais dans ce cas la question peut être ramenée à la question analogue pour le cercle.

Tm.