TERQUEM

Note sur le rapport d'Archimède

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 586-592

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__586_0>

NOTE SUR LE RAPPORT D'ARCHIMÈDE.

1. Nous croyons qu'il y a quelque utilité à faire connaître aux élèves studieux la manière dont l'illustre Syracusain est parvenu à ce rapport. Nous faisons usage des notations modernes en conservant la méthode d'Archimède ; car, en toute chose, l'idée est le point important, le signe est un accessoire d'une importance secondaire. Mais nulle part l'adoration des signes, la *seméiolatrie* n'est portée si loin que dans la science mathématique. Tel géomètre admettra votre démonstration si vous désignez une certaine idée par les sept lettres *rapport*, et il la repoussera si vous vous avisez de représenter la même idée par les cinq lettres *sinus*. Si les Euclide, les Archimède, les Apollonius revenaient, ils riraient de nos superstitions, adopteraient nos systèmes de notation, se mettraient au courant de nos progrès et se placeraient encore au premier rang.

2. Sept ouvrages d'Archimède sont restés. Le second porte pour suscription Κύκλου μέτρησισ, *Mesure du cercle*. Il ne contient qu'un livre et trois théorèmes.

1er Theorème.

L'aire d'un cercle quelconque est équivalent à l'aire d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence du cercle.

Demonstration. *L'aire du cercle n'est pas plus grande que celle du triangle rectangle*

Si l'aire du cercle était plus grande, soit D^2 la différence entre les deux aires. Inscrivons dans le cercle un polygone régulier tel que la différence entre son aire et celle du cercle soit moindre que D^2 ; ce qui est toujours possible. L'aire du polygone est donc supérieure à l'aire du triangle, c'est-à-dire, le périmètre du polygone, multiplié par son demi-apothème, serait plus grand que la circonférence multipliée par la moitié du rayon, ce qui est impossible; donc *l'aire du cercle ne saurait être plus grande que celle du triangle rectangle.*

Si l'aire du cercle était moindre, soit D^2 la différence; circonscrivons un polygone régulier tel que la différence entre son aire et celle du cercle soit moindre que D^2 ; ce qui est toujours possible ; l'aire du polygone est donc plus petite que celle du triangle ; c'est-à-dire, que le perimètre du polygone, circonscrit, multiplié par la moitié du rayon, est plus petit que la circonférence par la moitié du rayon ; ce qui est impossible, donc ces deux hypothèses étant exclues, le théorème est démontré.

Observation. Euclide démontre (lib. X, Prop. 1) que si, d'une quantité, on retranche plus que la moitié et ensuite on retranche encore du reste plus que la moitié de ce reste, et ainsi de suite, on peut parvenir à un reste plus petit qu'une quantité donnée ; on établit aussi facilement cette seconde proposition qu'on ne rencontre ni dans Euclide, ni dans Archimède : La différence entre l'aire du cercle et celle d'un polygone régulier inscrit est plus grande que le double de la différence entre l'aire du cercle et celle d'un polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés. Au moyen de ces deux propositions, il devient évident qu'on peut inscrire dans un cercle un polygone régulier dont l'aire diffère de celle du cercle, d'une quantité moindre qu'une quantité donnée. Archimède énonce cette proposition comme généralement connue.

Théorème II.

L'aire du cercle est au carré du diamètre comme 11 est à 14.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème précédent et du suivant.

Observation. Il semble que ce théorème devrait être placé après le suivant, et, contre son habitude, Archimède énonce comme un rapport absolu, une simple approximation.

Théorème III.

Une circonférence de cercle est égale à trois fois son diamètre, plus une partie moindre qu'un septième du diamètre, et plus grande que dix soixante et onzièmes du diamètre.

Démonstration. 1re Partie. La circonférence est plus petite que trois fois le diamètre plus un septième du diamètre.

Soit le triangle ECF rectangle en C, et ayant l'angle FEC égal au $\frac{1}{12}$ de quatre angles droits; menons 1° la droite EG bissectrice de l'angle FEC; 2° la droite EH bissectrice de l'angle GEC; 3° la droite EK, bissectrice de l'angle HEC; 4° la droite EL, bissectrice de l'angle KEC; de sorte que l'angle

$$\text{GEC}=\frac{4q}{24};\ \text{HEC}=\frac{4q}{48};\ \text{KEC}=\frac{4q}{96};\ \text{LEC}=\frac{4q}{192};$$

faisons $\text{FE}=306$; alors $\text{FC}=153$.

$\overline{\text{FE}}^2=93636$; $\overline{\text{FC}}^2=23409$; donc $\overline{\text{EC}}^2=70227$; $\text{EC}>265$;

$\frac{\text{EC}}{\text{CF}}>\frac{265}{153}$; la bissectrice GE donne :

$$\frac{\text{FE}+\text{EC}}{\text{FC}}=\frac{\text{EC}}{\text{GC}}>\frac{571}{153};$$

de là, on déduit ·

$$\frac{\overline{EC}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GC}^2}=\frac{\overline{EG}^2}{\overline{GC}^2}>\frac{326041}{23409};\ \frac{EG}{GC}>\frac{591\frac{1}{8}}{153}.$$

On connaît donc les trois côtés du triangle rectangle GCE ; et GH étant une bissectrice de l'angle GEK, on en déduit, en suivant la même marche que ci-dessus :

$$\frac{EC}{CH}>\frac{1162\frac{1}{8}}{153};\ \frac{HE}{HC}>\frac{1172\frac{1}{8}}{153}$$

et passant aux deux autres bissectrices :

$$\frac{EC}{KC}>\frac{2334\frac{1}{4}}{153};\ \frac{KE}{KC}>\frac{2339\frac{1}{4}}{153};\ \frac{EC}{LC}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Si du point E comme centre et du rayon EC, on décrit une circonférence, 2EC est le diamètre de cette circonférence et 2LC est le côté d'un polygone régulier de 96 côtés circonscrit à ce cercle.

Or $\frac{96.2LC}{2EC}<\frac{96.153}{4673\frac{1}{2}}=\frac{14688}{4673\frac{1}{2}}=\frac{29376}{9347}=3+\frac{1}{7}\cdot\frac{9345}{9347}$;

donc, à fortiori, la circonférence divisée par le diamètre est moindre que $3\frac{1}{7}$.

2[e] Partie. La circonférence est plus grande que trois fois le diamètre plus $\frac{10}{71}$ du diamètre.

Soit AC le diamètre d'une demi-circonférence, et CBA un triangle inscrit, ayant l'angle BAC $=\frac{4q}{12}$, menez les quatre cordes bissectrices successives AG, AH, AK, AL ; AG bissectrice de BAC ; AH bissectrice de GAC ; AK bissectrice de HAC ; enfin AL bissectrice de KAC.

Prenons AC $=$ 1560 ; alors BC $=$ 780 et AB $=$ 1351 moins une fraction ; donc $\frac{AB}{BC}<\frac{1351}{780}$.

Soit F le point où la bissectrice AG coupe la corde BC ;

on aura $\dfrac{AC + AB}{BC} = \dfrac{AC}{CF}$; mais les deux triangles rectangles CGF et CGA sont équiangles ; donc

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AG}{GC} \text{ ; donc } \frac{AG}{GC} = \frac{AC+AB}{BC} < \frac{2911}{780} \text{ ; } \frac{\overline{AG}^2}{\overline{GC}^2} < \frac{8473921}{780^2} \text{ ;}$$

$$\frac{\overline{AG}^2 + \overline{GC}^2}{\overline{GC}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{GC}^2} < \frac{9082321}{780^2} \text{ ; } \frac{AC}{GC} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780} \text{ ;}$$

en opérant de la même manière sur les quatre triangles AGC, AHC, AKC, ALC, on trouve successivement :

$$\frac{AC}{CH} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240} \text{ ; } \frac{AC}{CK} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66}, \frac{AC}{CL} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66} \text{ ; donc } \frac{CL}{AC} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}} \text{ ;}$$

or, la corde LC est le côté du polygone régulier inscrit de 96 côtés ; et

$$\frac{96.CL}{AC} > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = \frac{25344}{8069} = 3\,\frac{1137}{8071} \text{ ;}$$

$$\frac{1137}{8071} = 10.\,\frac{1137}{80710} = 10.\,\frac{1}{70 + \frac{1120}{1137}} > \frac{10}{71} \text{ ;}$$

donc le périmètre du polygone de 96 côtés divisé par le diamètre, et à fortiori la circonférence divisée par le diamètre, donne un rapport plus grand que $3\frac{10}{71}$. C. Q. F. D.

Observation 1re. Archimède se contente de donner les résultats, mais n'effectue pas les calculs ; ce qui est à regretter. Dans les extractions des racines, il prend pour approximation le reste divisé par le double de la racine, comme ont fait aussi les Arabes. On sait que les approximations décimales ne datent que du 17e siècle. Il est certain que ce genre d'approximation n'aurait pas échappé au génie de l'auteur de l'*Arénaire* (*V*. t. I, 515), si les anciens avaient eu la moindre notion de notre procédé graphique de numération. Il serait instructif de savoir ce qui a déterminé Archimède à adopter pour nombre arbitraire dans la première partie $306 = 2.3^2.17$; et dans la seconde partie, $1560 = 2^3.3.5.13$:

il y a été probablement conduit par quelques ingénieuses considérations d'arithmétique.

Observation 2. Archimède a donc ramené la recherche du rapport de la circonférence au diamètre à ce problème : Connaissant numériquement deux côtés d'un triangle rectangle, calculer les longueurs de la bissectrice d'un angle aigu et des deux segments formés sur le côté opposé à cet angle ; il applique successivement cette solution aux polygones réguliers circonscrits et inscrits de 12, 24, 48, 96 côtés. De nos jours, la théorie des polygones réguliers est un cas particulier de la théorie trigonométrique et forme double emploi dans les éléments de géométrie, ce qui n'a rien de surprenant. Toute la science ne renferme peut-être qu'une dizaine de propositions, mais que les auteurs ont le talent de présenter chacune vingt fois sous vingt énoncés différents, ce qui donne plus d'ampleur à la science et aux livres.

Observation 3. Selon Archimède, π est compris entre $3\frac{10}{71}$ et $3\frac{10}{70}$.

Or, $3\frac{10}{71} = 3,14084$; $3\frac{10}{70} = 3,14285$; comparant à la première tranche du rapport de Ludolph 3,14159, on voit que la grande limite d'Archimède est moins approchée de π que la petite limite. Ainsi, pour un diamètre de 497 mètres, la circonférence est comprise entre 1561 et 1562 mètres ; en prenant 1561, l'erreur n'est pas d'un demi-mètre ; aussi le rapport d'Archimède suffit dans les travaux industriels, et serait une source d'erreurs dans les calculs géodésiques et astronomiques.

Observation 4. Eudoce, dans son commentaire sur ce livre d'Archimède, dit qu'Apollonius a trouvé un rapport plus approché que celui d'Archimède (voy. page 474), et de même aussi Claude Ptolomée ; mais, observe Eudoce, cela n'ôte rien au mérite d'Archimède, car il est le premier qui ait indiqué un rapport, et ce qu'il y a d'admirable, le rapport le plus simple et nécessaire aux besoins de la vie, πρὸς τὰς τοὺ Βίου Χρέὶας αναγκαῖον.

Le rapport d'Appolonius ne nous est pas parvenu.

Celui de Ptolémée est 3,1416666 ; trop fort à partir de la quatrième décimale. Dans sa table des cordes (*Almageste*, liv. II), il donne pour corde à l'arc de 30 minutes 0.31'.25'', c'est-à-dire $\frac{1}{120}\left(\frac{31}{60}+\frac{25}{60^2}\right)$ du diamètre ; réduisant et multipliant par 120, on trouve le rapport indiqué, car Ptolémée divise le diamètre en 120 parties égales ; chaque partie en 60 primes, chaque prime en 60 secondes, etc, etc. Viète, dans son célèbre mémoire *Ad Angulares sectiones*, expose le premier une suite de théorèmes sur les cordes des arcs multiples, d'où l'on peut conclure les formules connues sur les lignes trigonométriques des arcs multiples ; appliquant ces théorèmes aux polygones réguliers, il en conclut les limites suivantes : 3,1415926535 et 3,1415926537.

(*Opera Mathematica*, p. 392, édit. Schooten, 1646.)