NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Démonstration élémentaire d'un théorème de Newton sur un rapport entre des quantités différentielles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 580-582

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__580_1>

points P et Q ont même signe que leurs premiers termes, donc $\frac{P}{Q}$ a même signe que $\cot n\varphi$; en M_1, ce signe est $+$; en M_3 ce signe est -1 ; en M_5, il est $+1$, et ainsi de suite ; et en M_{8n-1} il sera $+$. Lorsque $\sin^2\varphi < \frac{1}{2}$, alors $\cos^2\varphi > \frac{1}{2}$; donc, une au moins des fonctions est toujours de même signe que son premier terme ; or, de M_1 à M_3, de M_5 à M_7, de M_9 à M_{11}, etc., Q est de même signe que son premier terme et ne peut devenir nul, et, par conséquent, $\frac{P}{Q}$ ne peut devenir infini que dans les intervalles de M_3 à M_5, de M_7 à M_9, de M_{8n-1} à M_1 ; ainsi $\frac{P}{Q}$ devient $2n$ fois infini en passant de $-$ en $+$; c'est-à-dire l'excès est égal à $2n$; ainsi, comme dans le théorème de M. Cauchy, il y a donc n points-racines dans l'intérieur de la circonférence ; en d'autres termes l'équation $f(z) = 0$ a toujours n racines ; ce qu'il fallait démontrer. Tm.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UN THÉORÈME DE NEWTON.

Sur un rapport entre des quantités différentielles. (V. p. 506.)

—

Théorème. Si l'on prend un point E sur le côté BC d'un triangle rectiligne ABC, et qu'on mène par ce point la transversale EFG, infiniment rapproché de EC et coupant AB en F et AC en G, on a l'équation $\frac{BF}{CG} = \frac{EB \,.\, AB}{EC \,.\, AC}$

Démonstration. La propriété connue de la transversale donne $\frac{BF}{CG} = \frac{EB}{EC} \cdot \frac{AF}{AG}$; or BF et CG étant infiniment petits, on a $\frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC}$, donc, etc.

Corollaire. Lorsque le point E s'éloigne à l'infini, on a $EB = EC$ et $\frac{BF}{CG} = \frac{AB}{AC}$; proposition vraie lors même que BF et CG sont des quantités finies.

Observation. On démontre en géométrie que la parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés proportionnellement; quelque rapprochée que soit cette parallèle du sommet, les deux segments infiniment petits, partant de ce sommet, ont toujours pour rapport fini celui des côtés; il en est de même lorsque la parallèle s'éloigne à l'infini du sommet. C'est ici l'occasion de donner aux élèves une première notion de la théorie différentielle qui ne consiste qu'à trouver les rapports finis entre des quantités infiniment petites ou infiniment grandes. Il y a près d'un siècle qu'un géomètre français bien connu faisait voir combien il serait important d'introduire le calcul différentiel, d'une facilité si vulgaire, dans l'enseignement élémentaire; mais comme cette introduction faciliterait et abrégerait beaucoup la science, l'appauvrirait de phrases et l'enrichirait de faits, il est à croire que la proposition de ce géomètre, récemment renouvelée par feu M. de Coriolis, restera encore longtemps parmi les *pia desideria*. Pourquoi? C'est ce que je me garderai bien de dire. Le géomètre bien connu avait nom Jean Lerond d'Alembert.

On devrait aussi ajouter quelques notions de Dynamique aux théories de la statique. Euler a déjà remarqué que l'enseignement isolé de cette science propage une foule d'erreurs. L'introduction de la doctrine si séduisante des couples a encore augmenté cette source d'idées fausses chez les élèves qui n'entrent pas à l'École polytechnique. Dans le mois prochain nous donnerons quelques considérations nullement neuves et pourtant utiles sur les unités en mécanique. Tm.

NOTE

SUR LA RECHERCHE ÉLÉMENTAIRE DU NOMBRE π.

PAR M. ARMAND FARCY,
ancien élève de l'École polytechnique.

—

1. Les méthodes élémentaires pour le calcul du nombre π sont au nombre de quatre : deux directes et deux indirectes ; deux fondées sur la formule $C = 2\pi R$, ne faisant dépendre π que de la notion des longueurs ; deux fondées sur la formule $S = \pi R^2$, faisant dépendre π de la notion des surfaces, ce qui est moins conforme à sa définition habituelle.

La première (méthode directe fondée sur la formule $C = 2\pi R$), dont Archimède est le premier auteur, consiste à chercher la longueur d'une circonférence d'un diamètre connu, spécialement d'un diamètre 1, comme limite commune des périmètres réguliers inscrits et circonscrits, dont on double continuellement le nombre des côtés.

La seconde (méthode directe fondée sur la formule $S = \pi R^2$), introduite par Jacques Gregory, géomètre anglais, consiste à chercher la surface d'un cercle de rayon connu, spécialement de rayon 1, comme limite commune des polygones réguliers inscrits et circonscrits, dont on double continuellement le nombre des côtés.

La troisième (méthode indirecte fondée sur la formule $C = 2\pi R$), dont Schwab est le premier auteur, consiste à