NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ARMAND FARCY

Sur les courbes où le rayon de courbure a un rapport constant avec la partie de la normale interceptée entre la courbe et une droite fixe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 528-533

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__528_1>

SUR LES COURBES

où le rayon de courbure a un rapport constant avec la partie de la normale interceptée entre la courbe et une droite fixe.

PAR M. ARMAND FARCY,
ancien élève de l'École polytechnique.

Dans toute parabole, le rayon de courbure est double de la portion de normale interceptée entre la courbe et sa directrice. Cette propriété a été signalée (t. II, p. 185) et démontrée par des considérations de géométrie analytique. Nous l'établirons par le calcul différentiel ainsi qu'il suit :

I. La parabole, rapportée à son axe et à son sommet, ayant pour équation $y^2 = 2px$, si on transporte l'origine au pied de la directrice, cette équation devient

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right) = 2px - p^2,$$

ou plus symétriquement $y^2 + p^2 = 2px$. Il en résulte, en différentiant une première fois,

$$yy' = p, \text{ d'où } y' = \frac{p}{y},$$

puis en différentiant une seconde fois,

$$y'^2+yy''=0\text{, d'où } y''=-\frac{y'^2}{y}=-\frac{p^2}{y^3},$$

par suite le quarré du rayon de courbure, au point x, y :

$$R^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=\frac{(y^2+p^2)^3}{p^4}=\frac{8x^3}{p},$$

et le quarré de la normale comprise entre la courbe et sa directrice prise pour axe des y :

$$N^2=x^2+\frac{x^2}{y'^2}=\frac{x^2(y^2+p^2)}{p^2}=\frac{2x^3}{p}.$$

Donc $R^2=4.N^2$, ou bien $R=2N$. C. Q. F. D.

II. Soit encore $(y-h)^2=2p\left(x-\frac{p}{2}\right)$ l'équation collective de toutes les paraboles, ayant pour directrice l'axe des y et pour axe une parallèle à l'axe des x ; en la différentiant deux fois, on obtient successivement :

(1) équation primitive $(y-h)^2=2px-p^2$,

(2) $(y-h)y'=p$,

(3) $(y-h)y''+y'^2=0$.

De (3), on tire $y-h=-\frac{y'^2}{y''}$, puis de (2), $p=-\frac{y'^3}{y''}$, qui, substituées dans (1), donnent $\frac{y'^4}{y''^2}=-\frac{2xy'^3}{y''}-\frac{y'^6}{y''^2}$ (4).

Cette relation, résultant de l'élimination de h et de p entre (1), (2), (3), exprime une propriété commune de toutes les paraboles données par l'équation (1) ; mais en transposant, divisant par y'^4, multipliant par y'', puis par $\sqrt{1+y'^2}$, la relation (4) devient :

$$\frac{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{y''}=-2.x\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

ou bien : $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -2.\sqrt{x^2+\frac{x^2}{y'^2}}$, c'est-à-dire ce qu'il fallait démontrer.

III. Réciproquement, *si dans une courbe le rayon de courbure est en chaque point double (et de sens contraire) de la normale comprise entre ce point et une droite fixe, cette courbe est une parabole ayant la droite fixe pour directrice.* — La droite fixe étant prise pour axe des y, la relation supposée donne en chaque point de la courbe :

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -2x\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

ou, par la suppression de $\sqrt{1+y'^2}$:

$$\frac{1+y'^2}{y''} = -\frac{2x}{y'},$$

équation différentielle de la courbe proposée. On a vu ci-dessus que l'équation en termes finis $(y-h)^2 = 2px - p^2$, dans laquelle il entre deux constantes arbitraires, satisfait en chacun de ses points à l'équation différentielle du second ordre actuellement proposée ; elle en est donc l'intégrale générale, mais on la retrouve aussi comme il suit.

L'équation différentielle $\frac{1+y'^2}{y''} = -\frac{2x}{y'}$ donne, en ayant égard à $y'' = \frac{dy'}{dx}$: $-\frac{dx}{2x} = \frac{dy'}{y'(1+y'^2)}$, d'où, en intégrant, introduisant une première constante A, et repassant des logarithmes à leurs nombres $\frac{1}{A\sqrt{x}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, de là résulte : $y' = \frac{1}{\sqrt{A^2x-1}}$, c'est-à-dire $dy = \frac{dx}{\sqrt{A^2x-1}}$, d'où, intégrant et introduisant une nouvelle constante h : $y = h + \frac{2}{A^2}\sqrt{A^2x-1}$, ou bien : $(y-h)^2 = 2\frac{2}{A^2}x - \frac{4}{A^4}$; ou enfin en remplaçant $\frac{2}{A^2}$ par p, autre constante arbitraire : $(y-h)^2 = 2px - p^2$; ce qu'il fallait démontrer.

IV. Nous avons dû, dans la réciproque précédente, introduire cette restriction, que *le rayon de courbure était de sens contraire à la normale*, etc..... Pour en faire comprendre la nécessité, nous traiterons cette question plus générale : *Déterminer la courbe dans laquelle le rayon de courbure est à la normale comprise entre la courbe et une droite fixe, dans un rapport constant ?*

Soit m ce rapport constant : l'énoncé donne de suite, en prenant la droite fixe pour axe des y :

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = m\sqrt{x^2 + \frac{x^2}{y'^2}} = mx\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

ou bien $\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{mx}{y'}$, ou autrement : $\frac{dx}{mx} = \frac{dy'}{y'\sqrt{1+y'^2}}$;

d'où en intégrant : $Ax^{\frac{1}{m}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, A étant une constante arbitraire; de là résulte d'abord :

$$y' = \frac{Ax^{\frac{1}{m}}}{\sqrt{1 - A^2x^{\frac{2}{m}}}} \quad \text{puis enfin} \quad y = \int \frac{Ax^{\frac{1}{m}}}{\sqrt{1 - A^2x^{\frac{2}{m}}}}\,dx.$$

L'intégration de cette dernière formule donnera, en termes finis, l'équation du lieu demandé pour chaque valeur de m; mais il importe d'observer ici toute l'influence du signe de m.

Si le rayon de courbure doit être de même sens que la normale considérée, il faut prendre $m > 0$, et la formule conserve la forme ci-dessus : $y = \int \frac{Ax^{\frac{2}{m}}}{\sqrt{1 - A^2x^{\frac{2}{m}}}}\,dx.$

Si le rayon de courbure doit être de sens contraire à celui de la normale, il faut prendre $m < 0$, et la formule devient en remplaçant m par $-m$: $y = \int \frac{A dx}{\sqrt{x^{\frac{2}{m}} - A^2}}$.

Nous intégrerons l'une et l'autre dans les cas de $m = 1$ et de $m = 2$.

Dans le premier cas, si $m = 1$, on a : $y = \int \frac{A x . dx}{\sqrt{1 - A^2 x^2}}$, d'où en intégrant : $y = \beta - \frac{\sqrt{1 - A^2 x^2}}{A}$, ou bien : $(y - \beta)^2 + x^2 = \frac{1}{A^2}$; ou remplaçant $\frac{1}{A^2}$ par R^2 : $(y - \beta^2) + x^2 = R^2$. Équation qui, à cause de l'indétermination des constantes R et β, appartient à un cercle de rayon quelconque ayant son centre en un point quelconque de l'axe des y. Résultat facile à prévoir et à justifier.

Dans le même cas, si $m = 2$, on a : $y = \int \frac{A \sqrt{x} . dx}{\sqrt{1 - A^2 x}}$, d'où en intégrant :

$$y = 6 + \frac{1}{2} \text{arc} [\sin = A \sqrt{x}] - \frac{1}{2} A \sqrt{x - A^2 x^2}.$$

Famille de lignes transcendantes fort différentes comme on voit des paraboles considérées ci-dessus ; dans les unes comme dans les autres, le rayon de courbure est double de la normale ; mais dans les unes il est de même sens, dans les autres de sens contraire.

Dans le second cas, si $m = 1$, on a : $y = \int \frac{A dx}{\sqrt{x^2 - A^2}}$, d'ou en intégrant : $y = \beta + l \left[\frac{x}{A} + \sqrt{\frac{x^2}{A^2} - 1} \right]$. Nouvelle famille de courbes transcendantes fort différentes des cercles trouvés ci-dessus.

Enfin dans le même second cas, si $m=2$, on a :

$$y=\int \frac{A dx}{\sqrt{x-A^2}},$$

d'où on tire par intégration :

$$y=\beta+2A\sqrt{x-A^2},$$

ou bien

$$(y-\beta)^2=4A^2x-4A^4,$$

ou en remplaçant $2A^2$ par p :

$$(y-\beta)^2=2px-p^2.$$

Équation collective des paraboles étudiées dans cet article.