NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. A. LECOINTE

Mémoire sur quelques séries de sinus et cosinus

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 518-528
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__518_1>

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES SÉRIES DE SINUS ET COSINUS.

PAR L. A. LECOINTE.

Euler a donné, dans son Introduction à l'Analyse infinitésimale (*Introductio in Analysin infinitorum*, t. 1er, p. 218), plusieurs séries de sinus et de cosinus, et ce sont ces séries qui font l'objet du mémoire que nous croyons devoir publier.

On sait que cet illustre géomètre a été conduit à la sommation de ces séries en ayant recours aux séries récurrentes, ce qui exige les notions de l'Algèbre supérieure, tandis que le procédé que nous allons présenter ici, pour arriver au même but, nous paraît beaucoup plus simple, en ce qu'il ne touche nullement aux questions de l'Analyse supérieure.

I.

Considérons d'abord les deux séries infinies :

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a + \ldots\ldots$$
$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a + \cos 5a + \ldots\ldots$$

et proposons-nous de les sommer ; pour cela, représentons, pour plus de simplicité, par S la première série (celle des sinus), et par C la seconde (celle des cosinus).

Maintenant si l'on remarque que

$$\begin{aligned}
\sin a &= \ldots\ldots\ldots\ldots \sin a \\
\sin 2a &= \sin a \cos a + \sin a \cos a \\
\sin 3a &= \sin 2a \cos a + \sin a \cos 2a \\
\sin 4a &= \sin 3a \cos a + \sin a \cos 3a \\
\sin 5a &= \sin 4a \cos a + \sin a \cos 4a \quad \text{etc.....}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos a &= \ldots\ldots \cos a \\
\cos 2a &= \cos a \cos a - \sin a \sin a \\
\cos 3a &= \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a \\
\cos 4a &= \cos 3a \cos a - \sin 3a \sin a \\
\cos 5a &= \cos 4a \cos a - \sin 4a \sin a \quad \text{etc.....}
\end{aligned}$$

on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
S &= S.\cos a + (1 + C) \sin a, \\
C &= (1 + C) \cos a - S.\sin a.
\end{aligned}$$

Ces deux équations, ne renfermant que les deux inconnues S et C, donnent les expressions suivantes de ces deux inconnues :

$$S = \frac{\sin a}{2(1 - \cos a)}, \qquad C = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, nous avons :

$$(1) \quad \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a + \ldots = \frac{\sin a}{2(1 - \cos a)},$$

$$(2) \quad \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a + \cos 5a + \ldots = -\frac{1}{2}.$$

II.

Proposons-nous, maintenant, de sommer les deux séries infinies :

$$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \sin(a + 3b) + \ldots\ldots$$
$$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \cos(a + 3b) + \ldots\ldots$$

pour cela, représentons toujours par S la première série (celle des sinus), et par C la seconde (celle des cosinus).

Si nous remarquons que

$$\begin{aligned}
\sin a &= \sin a\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b+\sin b\cos a\\
\sin(a+2b) &= \sin a\cos 2b+\sin 2b\cos a\\
\sin(a+3b) &= \sin a\cos 3b+\sin 3b\cos a \text{ etc.....}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos a\\
\cos(a+b) &= \cos a\cos b-\sin a\sin b\\
\cos(a+2b) &= \cos a\cos 2b-\sin a\sin 2b\\
\cos(a+3b) &= \cos a\cos 3b-\sin a\sin 3b \text{ etc.....}
\end{aligned}$$

on aura :

$$\begin{aligned}
S = {}& \sin a\,(1+\cos b+\cos 2b+\cos 3b+\ldots..)+\\
&+\cos a\,(\sin b+\sin 2b+\sin 3b+\ldots..),\\
C = {}& \cos a\,(1+\cos b+\cos 2b+\cos 3b+\ldots...)-\\
&-\sin a\,(\sin b+\sin 2b+\sin 3b+\ldots..);
\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des séries (1) et (2), § 1er :

$$S=\sin a.\frac{1}{2}+\cos a.\frac{\sin b}{2(1-\cos b)}=\frac{\sin a-\sin(a-b)}{2(1-\cos b)},$$

$$C=\cos a.\frac{1}{2}-\sin a.\frac{\sin b}{2(1-\cos b)}=\frac{\cos a-\cos(a-b)}{2(1-\cos b)};$$

mais, on a :

$$\sin a-\sin(a-b)=2\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2},$$

$$\cos a-\cos(a-b)=-2\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2},$$

et
$$2(1-\cos b)=4\sin^2\frac{b}{2},$$

d'où

$$S=\frac{\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}},\qquad C=-\frac{\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}.$$

Ainsi, nous avons :

$$(3)\quad \sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\sin(a+3b)+\ldots=\frac{\cos\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}},$$

$$(4)\quad \cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+\cos(a+3b)+\ldots=-\frac{\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}.$$

Nous sommes parvenus à la sommation de ces deux séries, en ayant recours à celles du § 1er, mais on peut y arriver directement, comme, dans ce paragraphe, pour les séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples :

En effet, si nous remarquons que

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$
$$\sin(a+2b)=\sin(a+b)\cos b+\sin b\cos(a+b)$$
$$\sin(a+3b)=\sin(a+2b)\cos b+\sin b\cos(a+2b)\text{ etc}\ldots$$

et

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\cos(a+2b)=\cos(a+b)\cos b-\sin(a+b)\sin b$$
$$\cos(a+3b)=\cos(a+2b)\cos b-\sin(a+2b)\sin b\text{ etc}\ldots$$

on aura :

$$S=\sin a+S.\cos b+C.\sin b,$$
$$C=\cos a+C.\cos b-S.\sin b,$$

et ces deux équations nous donneront les valeurs de S et C, trouvées précédemment.

III.

Dans ce paragraphe, nous allons nous proposer de sommer les séries finies :

$$\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\sin 4a+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\sin na,$$
$$\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\cos 4a+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\cos na,$$
$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\sin(a+3b)\ldots\ldots+\sin(a+nb),$$
$$\cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+\cos(a+3b).\ldots.+\cos(a+nb).$$

Euler est arrivé à la sommation de ces séries en ayant recours aux séries (3) et (4) du § 2 ; mais on peut y arriver directement par la méthode de décomposition appliquée simultanément à deux des séries précédentes, et que nous avons fait connaître dans les §§ 1 et 2.

Ainsi, considérons d'abord les deux séries

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \ldots.. + \sin na,$$
$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 3a + \ldots.. + \cos na,$$

et proposons-nous de les sommer.

Pour cela, représentons la première (celle des sinus) par S, et la seconde (celle des cosinus) par C.

Si on décompose les quantités

$$\begin{array}{lll} & \sin a,\ \sin 2a,\ \sin 3a,\ \sin 4a \ldots\ldots\ldots & \sin na \\ \text{et} & \cos a,\ \cos 2a,\ \cos 3a,\ \cos 4a \ldots\ldots\ldots & \cos na \end{array}$$

de la même manière que dans le § 1er, on sera conduit aux deux équations

$$S = (S - \sin na)\cos a + (C - \cos na + 1)\sin a,$$
$$C = (C - \cos na + 1)\cos a - (S - \sin na)\sin a$$

qui, ne renfermant que les deux inconnues S et C, nous donneront :

$$S = \frac{\sin\frac{a}{2}(n+1)\sin\frac{a}{2}n}{\sin\frac{a}{2}},\quad C = \frac{\cos\frac{a}{2}(n+1)\sin\frac{a}{2}n}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Maintenant, supposons qu'il s'agisse de sommer les deux autres séries

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \ldots + \sin(a+nb),$$
$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \ldots + \cos(a+nb).$$

Représentons toujours la première par S et la seconde par C.

Si on décompose les quantités

$$\sin a,\ \sin(a+b),\ \sin(a+2b),\ \sin(a+3b)\ldots\ \sin(a+nb),$$
et $$\cos a,\ \cos(a+b),\ \cos(a+2b),\ \cos(a+3b)\ldots\ \cos(a+nb),$$

de la même manière que dans le § 2, on sera conduit aux deux expressions suivantes de S et C :

$$\begin{aligned}
S &= \sin a(1+\cos b+\cos 2b+\cos 3b+\ \ldots.+\cos nb)+\\
&\quad +\cos a(\sin b+\sin 2b+\sin 3b+\ldots..+\sin nb),\\
C &= \cos a(1+\cos b+\cos 2b+\cos 3b+\ldots..+\cos nb)-\\
&\quad -\sin a(\sin b+\sin 2b+\sin 3b+\ldots..+\sin nb);
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$S=\frac{\sin\left(a+\frac{b}{2}n\right)\sin\frac{b}{2}(n+1)}{\sin\frac{b}{2}},\quad C=\frac{\cos\left(a+\frac{b}{2}n\right)\sin\frac{b}{2}(n+1)}{\sin\frac{b}{2}}.$$

On aurait pu parvenir directement à ces formules sans avoir besoin de connaître les sommations des séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples.

En effet, remarquons, comme dans le § 2, que

$$\begin{aligned}
&\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a\\
&\sin(a+2b)=\sin(a+b)\cos b+\sin b\cos(a+b)\\
&\sin(a+3b)=\sin(a+2b)\cos b+\sin b\cos(a+2b)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sin(a+nb)=\sin[a+(n-1)b]\cos b+\sin b\cos[a+(n-1)b]\\
&\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\
&\cos(a+2b)=\cos(a+b)\cos b-\sin(a+b)\sin b\\
&\cos(a+3b)=\cos(a+2b)\cos b-\sin(a+2b)\sin b\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\cos(a+nb)=\cos[a+(n-1)b]\cos b-\sin[a+(n-1)b]\sin b,
\end{aligned}$$

d'où on déduit les deux équations

$$S = \sin a + [S - \sin(a+nb)] \cos b + [C - \cos(a+nb)] \sin b,$$
$$C = \cos a + [C - \cos(a+nb)] \cos b - [S - \sin(a+nb)] \sin b,$$

lesquelles donneront pour S et C les valeurs trouvées précédemment.

Des séries que nous venons de donner, il est facile de déduire celles-ci :

(1) $$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \ldots\ldots + \cos(2n+1)a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(n+1)2a}{\sin a},$$

(2) $$\cos 2a + \cos 2.2a + \cos 3.2a + \cos 4.2a + \ldots\ldots + \cos(n+1)2a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2n+3)a}{\sin a},$$

(3) $$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \ldots\ldots + \cos(2n-1)a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2na}{\sin a},$$

(4) $$\cos 2a + \cos 2.2a + \cos 3.2a + \cos 4.2a + \ldots\ldots + \cos(n-1)2a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2n-1)a}{\sin a}.$$

Maintenant, π désignant la demi-circonférence dont le rayon est 1, faisons dans les séries (1) et (2), § 4 : $a = \frac{\pi}{2n+3}$, et dans les séries (3) et (4), § 4 · $a = \frac{\pi}{2n}$, on aura :

$$\cos \varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \ldots\ldots + \cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{2},$$

$$\cos 2\varphi + \cos 2.2\varphi + \cos 3.2\varphi + \cos 4.2\varphi + \ldots\ldots + \cos(n+1)2\varphi = -\frac{1}{2},$$

$$\cos \psi + \cos 3\psi + \cos 5\psi + \cos 7\psi + \ldots\ldots + \cos(2n-1)\psi = 0,$$

$$\cos 2\psi + \cos 2.2\psi + \cos 3.2\psi + \cos 4.2\psi + \ldots\ldots + \cos(n-1)2\psi = 0,$$

en représentant $\frac{\pi}{2n+3}$ par φ et $\frac{\pi}{2n}$ par ψ.

Ces dernières séries sont très-importantes, ainsi que nous le verrons dans un mémoire que nous publierons prochainement, et qui est relatif à la théorie des nombres et à la géométrie de situation.

Si dans la série

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \ldots\ldots + \cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{2},$$

nous posons $\varphi = \frac{\pi}{17}$ ou $2n+3 = 17$, nous aurons la série

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 9\varphi + \cos 11\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi = \frac{1}{2}.$$

(Legendre, *Théorie des nombres*, 3e édit., t. II, p. 221, et *Géométrie*, p. 429.)

Maintenant, si dans la même série nous posons $2n+3=7$, nous aurons :

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi = \frac{1}{2},$$

ou bien

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi - \cos 2\varphi = \frac{1}{2},$$

d'où, en remplaçant $\cos 3\varphi$ par $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ et $\cos 2\varphi$ par $2\cos^2\varphi - 1$, on déduit :

$$(2\cos\varphi)^3 - (2\cos\varphi)^2 - 2(2\cos\varphi) + 1 = 0.$$

Cette équation, qui donne l'inscription du polygone régulier de sept côtés, est la même que celle donnée par Legendre dans son traité sur la théorie des nombres, t. II, p. 214, excepté que l'inconnue a été changée de signe.

Si dans l'équation précédente on remplace $\cos\varphi$ par $\sqrt{1-\sin^2\varphi}$, on aura l'équation

$$(2\sin\varphi)^6 - 7(2\sin\varphi)^4 + 14(2\sin\varphi)^2 - 7 = 0,$$

qui est celle donnée par Képler dans son Harmonique du monde (*Harmonices mundi*, 1619, in-fol.).

Lagrange a donné, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, la formule suivante :

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta\sin n\varphi=\frac{\sin m\varphi\sin(m-1)\theta-\sin(m-1)\varphi\sin m\theta}{2(\cos\varphi-\cos\theta)},$$

n étant une variable, de telle sorte que $\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta\sin n\varphi$ nous représente la série finie

$$\sin\theta\sin\varphi+\sin 2\theta\sin 2\varphi+\sin 3\theta\sin 3\varphi+\ldots\ldots+\sin(m-1)\theta\sin(m-1)\varphi,$$

et c'est cette formule que nous allons démontrer.

Démonstration. On a la relation

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\cos(a-b)-\frac{1}{2}\cos(a+b),$$

d'où, en posant $\theta-\varphi=\delta$, $\theta+\varphi=\omega$,

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta\sin n\varphi=\frac{1}{2}[\cos\delta+\cos 2\delta+\cos 3\delta+\ldots\ldots+\cos(m-1)\delta]-$$

$$-\frac{1}{2}[\cos\omega+\cos 2\omega+\cos 3\omega+\ldots\ldots+\cos(m-1)\omega];$$

mais on a, d'après le § 3 :

$$\cos\delta+\cos 2\delta+\cos 3\delta+\ldots\ldots+\cos(m-1)\delta=\frac{\cos\frac{\delta}{2}m\sin\frac{\delta}{2}(m-1)}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

$$\cos\omega+\cos 2\omega+\cos 3\omega+\ldots\ldots+\cos(m-1)\omega=\frac{\cos\frac{\omega}{2}m\sin\frac{\omega}{2}(m-1)}{\sin\frac{\omega}{2}},$$

d'où

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta\sin n\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\delta}{2}m\sin\frac{\delta}{2}(m-1)\sin\frac{\omega}{2}-\cos\frac{\omega}{2}m\sin\frac{\omega}{2}(m-1)\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\omega}{2}};$$

mais

$$\cos\frac{\delta}{2}m\ \sin\frac{\delta}{2}(m-1)=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\delta}{2}(2m-1)-\sin\frac{\delta}{2}\right],$$

$$\cos\frac{\omega}{2}m\ \sin\frac{\omega}{2}(m-1)=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\omega}{2}(2m-1)-\sin\frac{\omega}{2}\right],$$

d'où

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta\ \sin n\varphi=\frac{\sin\frac{\delta}{2}(2m-1)\sin\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\omega}{2}(2m-1)\sin\frac{\delta}{2}}{4\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\omega}{2}},$$

ou bien

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta\ \sin n\varphi=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)(2m-1)\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)(2m-1)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)};$$

or, nous avons :

$$\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)(2m-1)\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left[(m-1)\theta-m\varphi\right]-\frac{1}{2}\cos\left[m\theta-(m-1)\varphi\right],$$

$$\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)(2m-1)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left[(m-1)\theta+m\varphi\right]-\frac{1}{2}\cos\left[m\theta+(m-1)\varphi\right],$$

et $$2\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)=\cos\varphi-\cos\theta,$$

d'où

$$\Sigma_1^{m-1}\sin n\theta\ \sin n\varphi=$$

$$=\frac{\cos[(m-1)\theta-m\varphi]-\cos[m\theta-(m-1)\varphi]-\cos[(m-1)\theta+m\varphi]+\cos[m\theta+(m-1)\varphi]}{4(\cos\varphi-\cos\theta)};$$

mais

$$\cos[(m-1)\theta-m\varphi]=\cos(m-1)\theta\cos m\varphi+\sin(m-1)\theta\sin m\varphi.$$

$$\cos[m\theta-(m-1)\varphi]=\cos m\theta\cos(m-1)\varphi+\sin m\theta\sin(m-1)\varphi,$$

$$\cos[(m-1)\theta+m\varphi] = \cos(m-1)\theta \cos m\varphi - \sin(m-1)\theta \sin m\varphi,$$
$$\cos[m\theta+(m-1)\varphi] = \cos m\theta \cos(m-1)\varphi - \sin m\theta \sin(m-1)\varphi,$$

d'où on déduit enfin :

$$\Sigma_1^{m-1} \sin n\theta \sin n\varphi = \frac{\sin m\varphi \sin(m-1)\theta - \sin(m-1)\varphi \sin m\theta}{2(\cos\varphi - \cos\theta)}.$$

Ainsi la formule de Lagrange se trouve démontrée.