TERQUEM

Relations d'identité, et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 510-515

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__510_1>

RELATIONS D'IDENTITÉ,

Et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(V. p. 424.)

LIV. Théorème de Newton *sur les segments.*

Si l'on prend dans le plan d'une ligne de l'ordre m un

(*) La première trace des fonctions elliptiques se trouve dans Pascal. (Œuvres, t. V, p. 38 et suivantes, édit. de 1819.)

point fixe et que l'on mène par ce point deux sécantes, le produit des segments formés par la première sécante, divisé par le produit des segments formés par la seconde sécante, donne un quotient constant, quelque soit le point fixe, pourvu que les sécantes conservent mêmes directions.

Démonstration. Soit $P_m + P_{m-1} + \ldots\ldots P(_0) = 0$ l'équation de la ligne de l'ordre m; et $P_m = Ay^m + \ldots\ldots + Cx^m$; prenons le point fixe pour origine et les sécantes pour axes.

Premier cas. Aucune des trois quantités A, C, $P(_0)$ n'est nulle; faisons $y = 0$; le produit des segments formés par l'axe des x est égal à $(-1)^m \frac{P_0}{C}$; de même le produit des segments formés par l'axe des y est $(-1)^m \frac{P}{A}$; ce produit divisé par le précédent donne pour quotient $\frac{C}{A}$; prenons maintenant des sécantes parallèles aux précédentes et n'ayant pas non plus leur point commun sur la courbe; prenant ces nouvelles sécantes pour axes, le terme P_m ne changera pas (L, coroll. 1); les coefficients A et C ne changeant pas, le rapport $\frac{C}{A}$ reste le même.

2^e^ *cas.* Si A seul est zéro, alors $\frac{P(_0)}{A}$ est infini, et $\frac{C}{A}$ est nul; ce rapport restera nul pour toutes les sécantes parallèles aux axes; et $\frac{P(_0)}{A}$ restera toujours infini tant que $P(_0)$ n'est pas nul; donc *si une droite rencontre une courbe à l'infini, toute droite parallèle la rencontre aussi à l'infini.*

Si C seul est zéro, on a des conclusions analogues.

3^e^ *cas.* Si $P(_0)$ seul est zéro, alors l'origine est sur la courbe; $\frac{P(_0)}{A}$, $\frac{P(_0)}{C}$ sont nuls et leur rapport se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; toutefois ce rapport est déterminé et égal à $\frac{C}{A}$; car, supposons l'origine très-près de la courbe, alors $P(_0)$ est infiniment petit et le rapport segmentaire est toujours $\frac{C}{A}$.

4e *cas.* Si C et A sont nuls, le rapport segmentaire $\frac{C}{A}$ devient $\frac{0}{0}$ et reste indéterminé, et le théorème des segments n'a plus lieu, autrement, toutes les fois que les deux sécantes rencontrent la courbe à l'infini, la constance du rapport segmentaire n'existe plus.

5e *cas.* Si A et $P(_0)$ sont nuls, le rapport $\frac{C}{A}$ devient et reste infini.

Observation 1. Dans ce qui précède, le produit des segments comprend aussi les segments imaginaires.

Observation 2. La proportionnalité des produits des segments dans les coniques était connue des anciens. C'est la proposition XVII du troisième livre d'Apollonius, ainsi énoncée : Les rectangles des segments formés par deux cordes qui se coupent sont proportionnels aux carrés des tangentes parallèles à ces cordes; les propositions suivantes concernent divers cas particuliers. Newton est le premier qui, dans l'ouvrage cité ci-dessus (p. 423), ait étendu cette proprieté aux courbes du second genre (troisième ordre); cette proposition (VI, p. 4) ainsi que toutes les autres qu'on trouve dans cet ouvrage sont énoncées sans démonstration; elles ont été données ensuite par divers géomètres.

Observation essentielle. Une ligne de l'ordre m comprend aussi un système de lignes quelconques, situées sur un même plan et dont la somme des degrés est égale à m Ainsi, les propriétés des segments s'appliquent à un système de m droites dans un même plan, etc.; nous ne répéterons plus cette observation.

LV. *Cas particuliers.* 1° Si sur une droite rencontrant la courbe à l'infini, on prend deux points O, O′ par lesquels on mène deux sécantes quelconques parallèles, les produits des segments formés par les deux sécantes sont entre eux comme les produits des segments *finis*, réels et imaginaires formés sur la droite aux points O et O′; car les segments infinis dans les deux produits, ne différant que de la quantité finie OO′, sont égaux. Ainsi, dans la parabole, deux cordes parallèles étant rencontrées par un diamètre quelconque, les produits des segments formés sur ces cordes sont entre eux comme les parties du diamètre interceptées entre les cordes et la courbe; il en est de même dans l'hyperbole lorsque les cordes parallèles sont coupées par une droite parallèle à une asymptote.

2° Une corde étant conjuguée à un diamètre, le théorème des segments donne directement dans les deux coniques à centre : le carré de la demi-corde est au produit des segments du diamètre comme le paramètre du diamètre est à la longueur du diamètre; et dans la parabole : le carré de la demi-corde est équivalent au rectangle formé du paramètre et du segment *fini* du diamètre. Écrites algébriquement, ces propositions fournissent les équations les plus simples des coniques. C'est à ces mêmes équations, l'origine étant au sommet, que les coniques doivent leurs noms, comme nous le dirons dans un article sur l'origine de diverses dénominations.

LVI. *Problème.* Une courbe algébrique du degré m étant tracée, mener une tangente par un point pris sur la courbe.

Solution. Par un point O pris dans le plan de la courbe menons deux sécantes, rencontrant chacune la ligne en m points réels et à distances finies, chaque sécante fournit m segments, à partir du point O. Soit OM un segment pris sur la première sécante, et représentons par P le produit des $m-1$ autres segments; représentons de même par OM′ et P′ des quantités analogues pour la seconde sécante; et désignons par R le rapport constant des deux produits, on a donc :

$$\frac{OM.P}{OM'.P'}=R, \quad \text{d'où} \quad \frac{OM}{OM'}=\frac{RP'}{P};$$

prenons sur la sécante OM un point N et sur la seconde sécante un point N' tels que l'on ait :

$$\frac{OM}{OM'}=\frac{ON}{ON'}=\frac{R.P'}{P.};$$

il est évident que la droite NN' est parallèle à la corde MM'. Supposons que le point O se transporte sur la courbe, le rapport $\frac{OM'}{OM}$ prend la forme $\frac{0}{0}$, mais est égal à $\frac{RP'}{P}$, et la corde MM' devient une tangente; de là résulte cette construction : par le point de contact S on mène deux sécantes rencontrant chacune la courbe en $m-1$ autres points réels, à distances finies, faisant le produit des $m-1$ segments, on a le rapport $\frac{P'}{P}$; par un point quelconque O non situé sur la courbe, on mène deux sécantes parallèles aux cordes, ce qui fait connaître R; prenant sur les cordes deux longueurs SN, SN' telles que l'on ait $\frac{SN}{SN'}=\frac{RP'}{P}$, la droite menée par S parallèlement à NN' est la tangente demandée.

Application aux coniques. Par le point S je mène deux cordes ST, ST'; on a donc $\frac{P'}{P}=\frac{ST'}{ST}$; par un point V pris sur ST, je mène une parallèle LVL' à la corde ST'; on a donc :

$$R=\frac{SV.VT}{LV.VL'}; \quad \text{donc} \quad \frac{SN}{SN'}=\frac{SV.VT.ST'}{LV.VL'.ST};$$

prenant SN'=ST, il vient $SN=\frac{SV.VT.ST'}{LV.VL'}$; ligne facile à construire; mais il faut faire attention aux signes des segments pour savoir dans quel sens il faut porter SN.

Si les cordes ST, ST′ sont également inclinées sur un axe principal, ce qui arrive lorsqu'elles sont parallèles à deux diamètres égaux ou bien à deux cordes égales passant par un sommet, alors on a évidemment $SV.VT = LV.VL'$; donc, si $SN' = ST$, on a aussi $SN = ST'$. Il suffit donc dans ce cas de porter ST sur ST′ et ST′ sur ST′; dans le cercle, tous les diamètres étant égaux, la construction existe pour des cordes quelconques; elle est due ainsi que la suivante à Maclaurin.

LVII. *Cercles osculateurs dans les coniques*. Les cordes ST, ST′ étant également inclinées sur un axe principal, le cercle qui passe par les trois points S, T, T′, a donc au point S même tangente que la conique; c'est-à-dire que le cercle a deux points en commun avec la conique au point S, et deux autres points en T et T′; si le point T se rapproche continuellement de S, la corde ST devient finalement une tangente et ST′ une corde ayant même inclinaison sur l'axe principal que la tangente; le cercle qui a même tangente et même corde ST′ se nomme *cercle osculateur*; il a trois points en commun avec la conique au point S et un autre au point T′. Le *rayon de ce cercle est le rayon de courbure*; ainsi, pour construire le cercle osculateur en un point donné S sur la conique, on mène par ce point une tangente et puis une corde ayant sur un axe même inclinaison que la tangente; le cercle qui a la même tangente et la même corde est le cercle osculateur cherché.

Cette construction est impraticable aux sommets, parce que, en ces points, le cercle osculateur a un point *quadruple* en commun avec la courbure; mais on sait par d'autres considérations qu'aux extrémités d'un axe principal, le rayon de courbure est égal au demi-paramètre de cet axe. Nous reviendrons sur cette matière, et voir aussi tome II, p. 75 et 183.