Grand concours (année 1844)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 489-495

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__489_0>

GRAND CONCOURS (année 1844).

Étant donnés une ellipse et un point A *sur la circonférence; on décrit un cercle tangent à la courbe en ce point, et l'on mène au cercle et à l'ellipse, les deux tangentes communes, autres que celle qui toucherait les deux courbes au point* A.

On demande quel est le lieu géométrique du point d'intersection de ces deux tangentes, quand on fait varier le rayon du cercle.

Nota. *Si on représente l'ellipse par l'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *on pourra, si l'on veut, exprimer les coordonnées du point* A *en fonction d'une seule constante* φ, *de cette manière* $x=a \sin \varphi$; $y=b \cos \varphi$.

PRIX D'HONNEUR.

PAR M. MESNARD (ARMAND-NICOLAS),
Né le 27 janvier 1825, à Paris.
(Institution Coutant. — Collége royal Charlemagne. Professeur : M. Rouby.)

—

Première solution.

Étant donnés une ellipse et un point sur sa circonférence, on mène par ce point un cercle tangent à l'ellipse, et on demande le lieu géométrique des points de rencontre des tangentes communes au cercle et à l'ellipse, autres que celle qui passe par le point donné.

Prenons pour axe des y la tangente commune à l'ellipse et au cercle au point donné A, et pour axe des x la normale à ces deux courbes en ce point; l'ellipse aura pour équation

$$y^2+Bxy+Cx^2+Ex=0,$$

et en désignant par R le rayon variable du cercle, l'équation de ce cercle sera

$$y^2+x^2+2Rx=0.$$

Nommons α, β, les coordonnées inconnues du point de rencontre des tangentes communes à l'ellipse et au cercle, autres que la tangente au point A. Ces deux tangentes pourront être représentées par l'équation

$$(1)\qquad y-\beta=m(x-\alpha),$$

m ayant une valeur particulière pour chacune des tangentes.

Cela posé, la droite qui a pour équation (1), ou

$$y=mx+\beta-m\alpha \text{ ou } y=mx+n, \text{ en posant } \beta-m\alpha=n,$$

étant tangente à l'ellipse et au cercle, les équations provenant de la substitution de $mx+n$ à la place de y dans les équations de ces courbes, devront avoir leurs racines égales, ce qui nous fournira deux relations entre m, α, β et R, puisque $n=\beta-m\alpha$. Or, en considérant R comme une quantité connue, ces deux relations seraient deux équations en m, qui devront par conséquent avoir les mêmes racines; donc, en divisant chacune de ces deux équations par le coefficient de son premier terme, les autres coefficients devront être identiques, ce qui fournira deux relations entre α, β, R, entre lesquelles éliminant R, et remarquant que α et β sont alors l'x et l'y d'un point quelconque du lieu, on aura l'équation de ce lieu.

La substitution de $mx+n$ à la place de y dans l'équation $y^2+Bxy+Cx^2+Ex=0$ donne :

$$\left.\begin{array}{r} m^2 \\ +Bm \\ +C \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{c} +2mn \\ +Bn \\ +E \end{array}\right| x+n^2=0,$$

équation qui, devant avoir ses racines égales, donne :

$$(2mn+Bn+E)^2-4n^2(m^2+Bm+C)=0,$$

ou, simplifiant et remplaçant dans le résultat n par $\beta-m\alpha$:

$$(B^2-4C)(\beta-m\alpha)^2+(4Em+2BE)(\beta-m\alpha)+E^2=0;$$

ordonnant par rapport aux puissances de m, on aura :

$$(2)\quad \left.\begin{matrix}(B^2-4C)\alpha^2\\ -4E\alpha\\ \end{matrix}\right| m^2-2\left.\begin{matrix}(B^2-4C)\alpha\beta\\ +4E\beta\\ -2BE\alpha\end{matrix}\right| m+\left.\begin{matrix}(B^2-4C)\beta^2\\ +2BE\beta\\ +E^2\end{matrix}\right| =0.$$

De même, la substitution de $mx+n$ à la place de y dans l'équation du cercle $y^2+x^2+2Rx=0$, donne :

$$\left.\begin{matrix}m^2\\ +1\end{matrix}\right| x^2+2\left.\begin{matrix}mn\\ +2R\end{matrix}\right| x+n^2=0.$$

Or les deux racines de cette équation doivent être égales ; donc on aura :

$$(mn+R)^2-n^2(m^2+1)=0,$$

ou, simplifiant et remplaçant n par $\beta-m\alpha$:

$$(\beta-m\alpha)^2-2mR(\beta-m\alpha)-R^2=0;$$

ordonnant par rapport à m, il viendra :

$$(3)\qquad \left.\begin{matrix}\alpha^2\\ +2R\alpha\end{matrix}\right| m^2-\left.\begin{matrix}2\alpha\beta\\ -2R\beta\end{matrix}\right| m+\left.\begin{matrix}\beta^2\\ -R^2\end{matrix}\right| =0.$$

Divisant chacune des deux équations (2), (3), par le coefficient de m^2, et égalant alors les coefficients des autres termes, il viendra :

$$\frac{(B^2-4C)\alpha\beta-E(2\beta-B\alpha)}{(B^2-4C)\alpha-4E}=\frac{\beta(\alpha+R)}{\alpha+2R},$$

$$\frac{(B^2-4C)\beta^2+E(2B\beta+E)}{(B^2-4C)\alpha-4E}=\frac{\beta^2-R^2}{\alpha+2R}.$$

La première de ces deux relations étant du premier degré en R, on en tire :

$$\alpha \left\{ (B^2 - 4C)\alpha\beta - E(2\beta - B\alpha) + 2E\beta \right\} =$$
$$= R \left\{ (B^2 - 4C)\alpha\beta - 4E\beta - 2(B^2 - 4C)\alpha\beta + 2E(2\beta - B\alpha) \right\};$$

d'où
$$R = -\frac{E(2\beta + B\alpha)}{(B^2 - 4C)\beta + 2BE};$$

substituant cette valeur à la place de R dans la seconde relation, après avoir chassé les dénominateurs, on aura :

$$\left\{ \alpha - \frac{2E(2\beta + B\alpha)}{(B^2 - 4C)\beta + 2BE} \right\} \left\{ (B^2 - 4C)\beta^2 + 2BE\beta + E^2 \right\} =$$
$$= \left\{ (B^2 - 4C)\alpha - 4E \right\} \left\{ \beta^2 - \frac{E^2(2\beta + B\alpha)^2}{[(B^2 - 4C)\beta + 2BE]^2} \right\};$$

d'où l'on tire, en réduisant :

$$[(B^2 - 4C)\alpha\beta - 4E\beta] \left\{ (B^2 - 4C)\beta^2 + 2BE\beta + E^2 \right\} [(B^2 - 4C)\beta + 2BE] =$$
$$= [(B^2 - 4C)\alpha - 4E] \left\{ \beta^2 [(B^2 - 4C)\beta + 2BE]^2 - E^2(2\beta + B\alpha)^2 \right\}.$$

Divisant de part et d'autre par $(B^2 - 4C)\alpha - 4E$, supprimant dans les deux membres $\beta^2[(B^2 - 4C)\beta + 2BE]^2$, et divisant alors par E^2 qui devient facteur commun aux deux membres, on a :

$$\beta((B^2 - 4C)\beta + 2BE) = -(2\beta + B\alpha)^2;$$

développant et remplaçant α et β par x et y, il viendra :

$$(4) \quad (B^2 - 4C + 4)y^2 + 4Bxy + B^2x^2 + 2BEy = 0,$$

qui est l'équation du lieu cherché.

Cette équation, étant indépendante du terme en x et ne renfermant pas de terme tout connu, représente une courbe tangente à l'axe des x à l'origine ; cherchons maintenant la nature de cette courbe.

Pour que l'équation

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = 0$$

représente véritablement une ellipse, il faut que l'on ait la condition

$$B^2 - 4C < 0.$$

Or aucune hypothèse n'a été faite jusqu'à présent sur la quantité $B^2 - 4C$; donc, déjà, on obtiendra l'équation (4) quelle que soit la nature de la courbe représentée par l'équation

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = 0.$$

Mais cette équation peut représenter les trois courbes du second degré : voyons donc pour chacune de ces courbes ce que représentera l'équation (4).

Si nous supposons $B^2 - 4C < 0$, ce qui nous porte au problème énoncé, l'équation (4) donne :

$$16B^2 - 4B^2 (B^2 - 4C + 4) > 0;$$

car $B^2 - 4C + 4$ est alors négatif, ou positif et plus petit que 4; donc, le lieu répondant à l'énoncé du problème est une hyperbole tangente, au point donné, à la normale à l'ellipse en ce point.

Si nous supposons $B^2 - 4C > 0$, nous aurons :

$$16B^2 - 4B^2 (B^2 - 4C + 4) < 0,$$

car $B^2 - 4C + 4$ est une quantité positive plus grande que 4; donc, lorsque la courbe donnée est une hyperbole, le lieu cherché est une ellipse, qui de même que précédemment est tangente, au point donné, à la normale à l'hyperbole en ce point.

Enfin, supposons $B^2 - 4C = 0$, nous aurons :

$$16B^2 - 4B^2 (B^2 - 4C + 4) = 0;$$

donc, dans le cas où la courbe donnée est une parabole, on obtient encore une parabole pour le lieu cherché.

On peut remarquer aussi que, si le point donné était l'extrémité de l'un des axes, quelle que soit la nature de la courbe donnée, le lieu cherché serait cet axe lui-même ; ce qui se conçoit alors parfaitement, à cause de la symétrie, par rapport à cet axe, des deux courbes auxquelles on mène des tangentes communes.

En déterminant les coordonnées du centre et celles des foyers dans la courbe donnée et dans la courbe cherchée, on trouve que ces points sont les mêmes dans les deux courbes.

—

Seconde solution.

Supposons que l'équation de l'ellipse soit donnée de la forme

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1,$$

on pourra alors représenter les coordonnées du point donné au moyen d'une seule constante φ, ainsi qu'il suit :

$$x'=a\sin\varphi,\qquad y'=b\cos\varphi,$$

φ étant une constante qui varie avec la position du point donné sur l'ellipse ; car alors, on a :

$$\frac{a^2\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\cos\varphi}{b^2}=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1,$$

le cercle tangent à l'ellipse ayant pour rayon R : comme son centre se trouve sur la normale à l'ellipse au point donné, en appelant p et q les coordonnées de ce centre, on aura :

$$(1)\qquad q-b\cos\varphi=\frac{a\cos\varphi}{b\sin\varphi}(p-a\sin\varphi),$$

et, puisque le cercle est tangent à l'ellipse, on aura :

$$(2)\qquad \mathrm{R}^2=(q-b\cos\varphi)^2+(p-a\sin\varphi)^2.$$

Maintenant, si nous représentons les coordonnées du point du lieu, correspondant au cercle dont le rayon est R, par α et β, nous aurons pour la tangente commune à ce cercle et à l'ellipse passant par ce point, l'équation

$$y = mx + (\beta - m\alpha).$$

Or, cette ligne devant être tangente à l'ellipse, on aura :

$$(3) \qquad (\beta - m\alpha)^2 = a^2m^2 + b^2;$$

de plus, devant être tangente au cercle, cette droite devra être distante du centre de ce cercle de la quantité R, donc il faudra poser :

$$(4) \qquad \frac{q - mp - (\beta - m\alpha)}{\sqrt{1+m^2}} = \mathrm{R}.$$

Éliminant p et q entre les équations (1), (2), (4), l'équation résultante en m, devra donner pour cette inconnue les mêmes valeurs que celles qu'on tirerait de l'équation (3); donc si on divise chacune de ces deux équations par le coefficient de son premier terme, les coefficients des autres termes devront être identiques dans les deux équations, ce qui donnera deux relations entre lesquelles éliminant R, on aura l'équation du lieu cherché en remplaçant dans le résultat de l'élimination de R, α par x, et β par y.