NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VIGNAL

Démonstration géométrique de la formule de trigonométrie $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)}$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 456-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__456_0>

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

De la formule de trigonométrie $\dfrac{b+c}{b-c}=\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-C)}$.

PAR M. VIGNAL,
professeur de mathématiques.

—

Pour résoudre un triangle rectiligne quelconque, dans lequel deux côtés b et c et l'angle compris A sont donnés, on a recours à la proportion

$$b+c : b-c :: \operatorname{tang}.\frac{1}{2}(B+C) : \operatorname{tang}.\frac{1}{2}(B-C).$$

Pour arriver à cette formule, on fait usage de proportions dont on a, il est vrai, une démonstration géométrique, mais qui n'apparaissent qu'à titre d'auxiliaires. On pourrait en éviter l'emploi de la manière suivante à l'aide de la géométrie.

Soit le triangle ABC (*fig*. 61), dont nous représenterons les côtés par a, b, c et les angles par A, B, C. Prenons, après avoir prolongé b, à droite et à gauche de A, une longueur AD et AD′ égale au côté c. Joignons BD et menons la bissectrice AE de l'angle BAD. Enfin joignons D′ et B, et élevons D′F perpendiculaire à BD′.

Les droites AE et D′B partageant DD′ et DB en deux parties égales sont parallèles, donc D′B est perpendiculaire à DB. Mais de ce que D′F est perpendiculaire à D′B, D′F et DB sont aussi parallèles.

Les deux triangles semblables CD′F, CDB donnent la proportion

$$CD : CD' :: DB : D'F,$$

ou bien

$$b+c : b-c :: \mathrm{DB} : \mathrm{D'F},$$

et en divisant les deux derniers termes par BD',

$$b+c : b-c :: \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DB'}} : \frac{\mathrm{D'F}}{\mathrm{BD'}}.$$

Mais

$$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BD'}} = \mathrm{tang\,DD'B} = \mathrm{tang\,DAE} = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}),$$

$$\frac{\mathrm{D'F}}{\mathrm{BD'}} = (\mathrm{tang\,FBD'}) = \mathrm{tang}\,(\mathrm{B}-\mathrm{D'BA}) = \mathrm{tang}\left\{\mathrm{B}-\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})\right\} =$$

$$= \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{C}),$$

donc enfin

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{C})}.$$