TERQUEM

# Note sur le même sujet

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 3 (1844), p. 431-435

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__431_1>

## NOTE SUR LE MÊME SUJET.

I. La solution qu'on vient de lire ne laisse rien à désirer pour la simplicité et l'élégance. Mais nous croyons qu'il n'est pas sans utilité de traiter la même question sous un point de vue plus général.

Soient deux coniques situées dans le même plan et données chacune par une équation générale à six termes et rapportées à des axes quelconques. Concevons une droite tangente aux deux coniques, et soit $y - ax - y' + ax' = 0$ l'équation de cette droite, passant par le point $(x', y')$; on aura pour la première conique l'équation de condition (t. II, p. 111),

$$a^2(mx'^2 - 2kx' + l') - 2a(ky' + k'x' + n - mx'y') + \\ + my'^2 - 2k'y' + l' = 0.$$

On a une équation analogue pour la seconde conique, ces équations devant donner les mêmes valeurs pour le coefficient angulaire $a$, il vient :

$$\frac{mxy - ky - k'x - n}{mx^2 - 2kx + l} = \frac{\mu xy - \varkappa y - \varkappa' x - \nu}{\mu x^2 - 2\varkappa x + \lambda},$$

$$\frac{my^2 - 2k'y + l'}{mx^2 - 2kx + l} = \frac{\mu y^2 - 2\varkappa' y + \lambda'}{\mu x^2 - 2\varkappa' x + \lambda};$$

$x$, $y$ sont les coordonnées du point d'intersection de deux tangentes communes, et les lettres grecques représentent pour la seconde conique des fonctions analogues aux mêmes fonctions, désignées par des lettres romaines dans la première conique; ces équations prennent cette forme

$$\mu x\,[ly - kxy + k'x^2 + nx] + \varkappa\,[myx^2 - ly - 2k'x^2 - 2nx] -$$
$$- \varkappa' x\,(mx^2 - 2kx + l) - \nu\,[mx^2 - 2kx + l) -$$
$$- \lambda\,(mxy - ky - k'x - n) = 0,$$
$$\mu\,[ly^2 - 2kxy^2 + 2k'yx^2 - l'x^2] + 2\varkappa x\,(my^2 - 2k'y + l') -$$
$$2\varkappa' y\,(mx^2 - 2kx + l) - \lambda\,(my^2 - 2k'y + l') + \lambda'\,(mx^2 - 2kx + l) = 0,$$

prenant la valeur de $y$ dans la première équation, et la substituant dans la seconde, on a une équation du sixième degré en $x$; il y a donc six points d'intersection entre les tangentes communes; par conséquent, il ne saurait exister que quatre tangentes communes; ce qu'on pouvait prévoir à priori. D'ailleurs on démontre aisément, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, que deux lignes algébriques, placées sur le même plan, l'une du degré $m$, et l'autre du degré $n$, ne peuvent avoir en commun que $mn\,(m-1)\,(n-1)$ tangentes; et dans le cas actuel $m = n = 2$; on voit aussi qu'on peut simplifier les deux équations, en prenant $k = k' = 0$, $\varkappa = 0$, ce qui est toujours possible si les deux courbes ont un centre; si l'une, la première par exemple, est une parabole, alors $m = 0$, on peut faire $\varkappa = \varkappa' = 0$ et $k = 0$; si les deux sont des paraboles, alors $m = \mu = 0$, on peut encore prendre $k = \varkappa = 0$. Ce qui simplifie les deux équations.

II. Représentant les binômes de cette forme $m\varkappa - k\mu$ par $[m\varkappa]$, alors les deux équations peuvent s'écrire ainsi

$$\left.\begin{array}{c} yx^2[m\varkappa]+x^3[k'\mu]+yx[l\mu]+x^2[n\mu]+y[k\lambda]+ \\ +x\left(2[k\nu]+[k'\lambda]\right)+[n\lambda]=0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{c} 2y^2x[m\varkappa]+2yx^2[k'\mu]+y^2[l\mu]+2yx[k\varkappa']+x^2[m\lambda']+ \\ +2y[k'\lambda]+2x[l'\varkappa]+[l\lambda']=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Si les coniques sont concentriques, prenant le centre pour origine, les termes du troisième degré s'annulent ainsi que le terme en $xy$ de la seconde équation, de sorte qu'on n'a plus que deux équations du second degré.

Si les deux coniques ont un foyer en commun, fixant l'origine à ce foyer, et prenant les axes rectangulaires, on a $l=l'$, $\lambda=\lambda'$, $n=\nu=0$. (Voir t. II, p. 427); ainsi les deux derniers termes des deux équations, ainsi que le terme en $x^2$ et le coefficient $[k\nu]$, disparaissent; ce qui simplifie l'équation finale. Du reste, nous reviendrons dans une autre occasion sur cette discussion importante.

III. Supposons que la seconde conique représentée par des lettres grecques, soit entièrement donnée et que la première ne soit assujettie qu'à quatre conditions; les six binômes $k$, $k'$, $l$, $l'$, $m$, $n$ fournissent cinq rapports; supposons que l'on ait quatre équations entre ces cinq rapports, au moyen de ces quatre équations et des équations (1) et (2), on pourra eliminer les cinq rapports, et on obtiendra le lieu géométrique des intersections des tangentes communes à la conique fixe et à la conique variable. Donnons quelques exemples.

1. *La conique variable est assujettie à rester semblable à elle-même et semblablement placée.*

Fixons l'origine au centre d'homologie, alors A, B, C devient $p^2$A, $p^2$B, $p^2$C, D et E se changent en $p$D, $p$E et F ne changent pas, donc $m$, $k$, $k'$, $l$, $l'$, $n$ deviennent $p^4m$, $p^3k$, $p^3k'$, $p^2l$ $p^2l'$, $p^2n$; substituant dans les équations (1) et (2), elles deviennent divisibles par $p^2$ ; et chacune ne renferme plus que $p^2$ et $p$ ; éliminant cette constante arbitraire, on obtient le lieu géométrique du point de concours des tangentes communes à une conique fixe et à une conique toujours semblable à une autre conique et semblablement située, et selon les diverses suppositions que l'on fera sur la position du centre d'homologie, le lieu géométrique se simplifiera.

2. La conique variable est assujettie à n'avoir qu'un élément arbitraire.

Supposons qu'on connaisse les quatre binômes $\mu$, $\nu$, $\lambda$, $\varkappa$; et qu'on ait une relation entre $\lambda'$ et $\varkappa'$; on tire de la première équation la valeur de $\varkappa'$, pour la substituer dans la seconde équation, où l'on prend la valeur de $\lambda'$, et l'on voit que $\varkappa'$ est une fonction en $x, y$ du troisième degré divisée par une autre fonction du même degré, et $\lambda'$ une fonction du sixième degré divisée par une fonction du cinquième degré; d'après le degré de la relation entre $\lambda'$ et $\varkappa'$, il sera facile de connaître la limite supérieure du degré du lieu géométrique; p. ex. si l'on a $\lambda'=a\varkappa'^2+b$, $a$ et $b$ sont des quantités données, le lieu géométrique ne dépassera jamais le douzième degré.

Soit $Ay^2+Bxy+Cx^2+Ex=0$; équation de la conique donnée, et $y^2+x^2-2ay-2rx+a^2=0$, l'équation de la conique ayant un paramètre $r$ variable; on a $l=0$, $n=0$, $\mu=-4$, $\nu=-4r$, $\varkappa'=-4a$, $\lambda=0$, $\lambda'=4(r^2-a^2)$, $\nu=4ar$.

Faisant le calcul, on arrive à une équation du sixième degré; la conique variable est ici une ellipse dont les diamètres conjugués égaux sont constamment parallèles aux axes, et qui touche constamment l'axe des $y$ en un point ($x=0$, $y=0$).

Supposons de plus $a=0$, l'équation finale est du troisième degré, et se décompose ainsi

$$(mx-2k)\left[(ky-k'x)^2+l'y(my-2k)\right]=0;$$

$mx - 2k = 0$, est l'équation d'une tangente parallèle à l'axe des $y$, et touchant la conique donnée au point diamétralement opposé à l'origine ; l'équation du lieu géométrique peut se mettre sous la forme $A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y = 0$, donc $B'^2 - 4A'C' = -4ml'k'^2$ ; mais $l' = E^2$ ; donc si la conique donnée est une ellipse, le lieu cherché est une hyperbole et *vice versâ* ; les deux courbes sont concentriques, et si la conique fixe est une parabole, le lieu cherché est aussi une parabole.

L'équation aux axes principaux est (V. t. I, p. 496), pour la conique fixe

$$ky^2(k\cos\gamma + k') + xy(k^2 + ml' - k'^2) + x^2[-2kk' + \cos\gamma(ml' - k'^2)] = 0,$$

pour le lieu cherché

$$y^2[(k^2 + ml')\cos\gamma + kk'] + xy(k^2 + ml' - k'^2) +$$
$$+ x^2[-2kk' - k'^2\cos\gamma] = 0.$$

Ainsi les deux courbes n'ont pas les mêmes axes principaux.

Si $\gamma = 1^q$, alors on revient au problème du concours ; les axes principaux sont les mêmes, et les deux courbes se coupant orthogonalement deviennent bi-confocales, il est à remarquer que la bissectrice des deux tangentes à l'ellipse, est une tangente à l'hyperbole bi-confocale, de sorte que l'enveloppe de cette bissectrice est une hyperbole. C'est une conséquence du théorème XXIV. (Tome II, p. 538.)

Nous nous appuierons sur cette conséquence pour démontrer dans le prochain numéro, par des considérations géométriques infinitésimales le beau Théorème d'un éminent géomètre sur les *arcs semblables* dans l'ellipse (V. p. 425) ; dans le même numéro, M. Gérono donnera une solution purement synthétique du problème du concours.

Tm.