NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. A. SERRET

Note sur la question proposée au concours général de 1844 (Mathématiques spéciales)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 425-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__425_0>

NOTE

Sur la question proposée au concours général de 1844. (Mathématiques spéciales). (V. p. 377.)

PAR J. A. SERRET.

La belle proposition que l'Académie de Paris a choisie cette année pour le sujet de concours, est due à M. Chasles. Elle se trouve énoncée dans un mémoire présenté, par ce savant géomètre, à l'Académie des sciences (*) et intitulé: *Propriétés géométriques des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable.*

L'étude *géométrique* des transcendantes elliptiques de seconde espèce, a naturellement conduit M. Chasles à des théorèmes nouveaux, dont la démonstration directe et synthétique offrirait sans doute de grandes difficultés : parmi ces théorèmes dont l'auteur n'a pas encore publié la démonstration, se trouvent les suivants.

Quand deux arcs semblables (**) *ont une extrémité commune, leur différence est égale à la différence entre les tangentes menées par les deux autres extrémités, et terminées à leur point de concours.*

Par ce point et l'extrémité commune des deux arcs, on peut faire passer une conique homofocale à la proposée.

Quand deux arcs semblables ont une extrémité commune,

(*) Comptes rendus des seances de l'Académie des sciences, t. XVII, p. 838.
(**) M. Chasles appelle arcs semblables d'une section conique, ceux dont la différence est rectifiable.

dans l'angle formé par les tangentes menées par leurs deux autres extrémités, on peut inscrire un cercle qui touche la conique au point commun des deux arcs.

Des théorèmes qui précèdent, on conclut aisément le suivant qui fournit la solution de la question qui nous occupe.

Si l'on considère tous les cercles qui touchent une section conique en un même point, et qu'on mène à chacun de ces cercles deux tangentes qui touchent en même temps la conique, le lieu géométrique du point de rencontre de ces deux tangentes sera la trajectoire orthogonale et conjuguée de la conique donnée qui passe par le point donné.

M. Chasles ne tardera pas sans doute à publier ses élégantes recherches. Quant à nous, nous n'avons d'autre but que de montrer comment on pouvait arriver simplement, et à l'aide de l'analyse à la solution de la question proposée ; seulement nous donnerons un peu plus de généralité à l'énoncé en ne spécifiant pas l'espèce de la conique donnée.

PROBLÈME. *Étant donnés une conique quelconque et un point fixe sur cette courbe, on lui mène un cercle tangent en ce point, et l'on demande le lieu décrit par le point de rencontre des deux tangentes extérieures communes à la conique et au cercle, lorsque le rayon de ce dernier varie.*

SOLUTION. Soient pris pour axe des y la tangente commune au point donné au cercle et à la courbe, et pour axe des x la normale.

L'équation de la conique sera

$$y^2 + Axy + Bx^2 + Cx = 0, \tag{1}$$

et celle du cercle

$$y^2 + x^2 + 2rx = 0. \tag{2}$$

Substituant $mx + n$ à y, dans ces deux équations, on trouve

$$(m^2 + Am + B)x^2 + (2mn + An + C)x + n^2 = 0,$$
$$(m^2 + 1)x^2 + 2(mn + r)x + n^2 = 0;$$

lesquelles équations auront pour premiers membres des carrés parfaits, si l'équation

$$(3) \qquad y = mx + n,$$

est celle d'une tangente commune au cercle et à la conique. Dans cette hypothèse on aura les deux conditions suivantes :

$$(4) \qquad (A^2 - 4B)\, n^2 + 4Cmn + 2ACn + C^2 = 0,$$

$$(5) \qquad n^2 - 2mnr - r^2 = 0.$$

Si dans les équations (4) et (3) on met au lieu de m sa valeur tirée de (5), on aura

$$(6) \qquad \{r(A^2 - 4B) + 2C\}\, n^2 + 2ACrn + Cr(C - 2r) = 0,$$

$$(7) \qquad (2r + x)\, n^2 - 2ryn - r^2 x = 0.$$

Et l'équation (7), dans laquelle on mettra successivement au lieu de n, les deux racines de l'équation (6) fournira les équations des deux tangentes extérieures communes au cercle et à la conique; mais si x et y représentent *spécialement* les coordonnées du point où ces deux tangentes se coupent, on voit que l'équation (7) *se changera en une identité*, quand on mettra au lieu de n l'une quelconque des racines de l'équation (6). Sous ce point de vue on peut donc dire que les équations (6) et (7) ont les mêmes racines, et par suite sont identiques.

L'identification des équations (6) et (7), fournit les relations

$$\frac{2r + x}{r(A^2 - 4B) + 2C} = \frac{-y}{AC} = \frac{-rx}{C(C - 2r)},$$

ou

$$(8) \qquad \{(A^2 - 4B)y + 2AC\}\, r + C(Ax + 2y) = 0,$$

$$(9) \qquad (Ax + 2y)\, r - Cy = 0.$$

Ces équations ne renferment r qu'au premier degré : elles représentent deux droites qui se coupent au même point que les tangentes communes. On trouve en éliminant r,

$$(10)\qquad (A^2-4B+4)y^2+4Axy+A^2x^2+2ACy=0,$$

équation qui est celle du lieu géométrique demandé, lequel n'est autre qu'une section conique tangente à l'origine, à l'axe des x, et qui par conséquent coupe orthogonalement la conique donnée au point donné; cette dernière remarque nous sera tout à l'heure très-utile pour reconnaître la position relative des deux courbes.

Si H et H' représentent les quantités que l'on désigne habituellement par B^2-4AC, et qui sont relatives aux courbes (1) et (10), on trouve

$$H=A^2-4B,\qquad H'=-4A^2(A^2-4B),$$

la courbe cherchée sera donc une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que la courbe donnée sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Ces deux courbes ont même centre; on trouve en effet pour les coordonnées du centre de la première,

$$(11)\qquad 2y+Ax=0,\qquad Ay+2Bx+C=0,$$

et pour celui de la seconde

$$(12)\quad (A^2-4B+4)y+2Ax+AC=0,\quad 2y+Ax=0,$$

et les équations (12) sont évidemment des conséquences, des équations (11). Ces deux systèmes s'accordent à donner

$$y=\frac{-AC}{A^2-4B},\qquad x=\frac{2C}{A^2-4B}.$$

Si de l'équation (10) on retranche l'équation (1) après l'avoir préalablement multipliée par 4, on trouvera

$$(13)\qquad (A^2-4B)(y^2+x^2)+2ACy-4Cx=0.$$

Si (A^2-4B) n'est pas nul, c'est-à-dire si les courbes (1) et (10) ne sont pas des paraboles, l'équation (13) représente un cercle qui passe par les quatre points communs aux courbes (1) et (10) et qui du reste a évidemment même centre que ces deux courbes (*); on conclut de là que les deux courbes (1) et (10) ont mêmes axes, et comme elles se coupent orthogonalement, il en résulte qu'elles sont homofocales.

Si $A^2 - 4B$ est nul, l'équation (13) devient

$$(14) \qquad Ay - 2Cx = 0.$$

Elle représente une droite perpendiculaire aux diamètres des paraboles (1) et (10); il résulte encore de là que ces deux courbes ont même axe et même foyer, puisqu'elles se coupent orthogonalement.

En résumé on voit que le lieu demandé est la trajectoire conjuguée et orthogonale qui passe par le point donné de la conique donnée.

On peut au surplus rendre plus explicite cette dernière conséquence.

Supposons d'abord que la conique donnée soit une ellipse comme dans l'énoncé du problème proposé au concours.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de la courbe rapportée à son centre et à ses axes, et $x'y'$ les coordonnées du point donné M, le lieu demandé sera une hyperbole, et si du point M comme centre avec OM, comme rayon, on décrit un cercle qui coupe l'ellipse aux quatre points M, M', M'', M''', ces quatre points, ainsi que nous l'avons montré précédemment, appartiendront

(*) C'est un principe général que si $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sont les équations de deux coniques concentriques, l'équation $\varphi + \lambda\psi = 0$ où λ est une constante quelconque, appartient à une troisième conique concentrique aux premières.

aussi à l'hyperbole qui aura par conséquent les mêmes axes que l'ellipse ; son équation sera donc de la forme

$$Py^2 + Qx^2 = 1.$$

Pour déterminer les coefficients P et Q, nous aurons d'abord

$$Py'^2 + Qx'^2 = 1\,,$$

et comme les tangentes en M à l'ellipse et à l'hyperbole, se coupent à angles droits, on aura aussi

$$\frac{Qx'}{Py'}\cdot\frac{b^2x'}{a^2y'} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{Qx'^2}{Py'^2} = \frac{a^2}{-b^2},$$

de cette équation et de la précédente, on tire en posant

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

$$Q = \frac{a^2}{c^2x'^2}, \quad P = \frac{-b^2}{c^2y'^2};$$

d'où l'on déduit pour l'équation du lieu demandé

$$\frac{x^2}{\left(\frac{cx'}{a}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{cy'}{b}\right)^2} = 1.$$

Ce qui est bien l'équation de l'hyperbole homofocale, qui passe par le point M, puisque

$$\left(\frac{cx'}{a}\right)^2 + \left(\frac{cy'}{b}\right)^2 = c^2.$$

Un calcul analogue conduit aux mêmes conséquences, dans le cas où la conique donnée est une hyperbole.

Supposons en dernier lieu que la courbe donnée soit une parabole ; cette courbe rapportée à son sommet et à son axe, aura pour équation

$$y^2 = 2px.$$

Soient x', y' les coordonnées du point donné M, la courbe cherchée sera une parabole, passant par le point M et son symétrique M', elle aura donc même axe que la proposée, puisque la direction de leurs diamètres est la même, et son équation sera de la forme

$$y^2 = Px + Q.$$

Comme les deux courbes se coupent à angles droits, on aura pour déterminer P et Q,

$$y'^2 = Px' + Q \quad \text{et} \quad \frac{Pp}{2y'^2} = -1,$$

ce qui conduit à l'équation suivante du lieu demandée

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2} - x'\right)^2.$$