NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FINCK
AUGUSTE DELADÉRÉERE

Recherche des racines complexes des équations numériques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 41-46
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__41_0>

RECHERCHE

DES

RACINES COMPLEXES DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES,

PAR M. FINCK,
Docteur ès sciences, professeur au collége de Strasbourg,

ET

M. AUGUSTE DELADÉRÉERE,
Professeur, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

—

Note. La dénomination de *racine complexe*, introduite par M. Gauss, sert maintenant à désigner une racine imaginaire dont les deux coefficients réels sont commensurables. Dans un beau Mémoire sur la théorie des nombres, M. Dirichlet a donné, pour trouver les racines complexes, une méthode entièrement identique à celle qui est en usage pour les racines réelles commensurables. Nous devons ce renseignement à l'obligeance de M. Lebesgue, professeur à la faculté des sciences de Bordeaux. Cet arithmologue distingué (*) nous promet d'enrichir prochainement les Annales, de démonstrations élémentaires des principales propositions de M. Dirichlet. Les éléments finiront par admettre la nouvelle méthode, dont celle qu'on pratique n'est qu'un cas particulier. En attendant, l'importance de la matière nous engage à publier ce que nous avons reçu à ce sujet, il y a un mois, de

(*) Nous hasardons cette expression qui paraît propre à désigner le petit nombre d'esprits éminents qui font faire des progrès à la plus difficile des branches du calcul, à la théorie des nombres, où il reste encore tant de terrains à défricher.

M. Deladéréere et, récemment, de M. le professeur Finck. Nous réunissons les deux notes en une seule. Tm.

1. *Définition.* Une expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$, où a et b sont des nombres entiers, est divisible par le nombre entier d, lorsque dans le quotient $a'+b'\sqrt{-1}$, a' et b' sont des nombres entiers. (D.)

2. *Proposition I.* a et b étant des nombres entiers, si $a+b\sqrt{-1}$ est divisible par d, il faut et il suffit que $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ soient des nombres entiers. (D.)

3. *Proposition II.* Si un nombre premier p divise un produit $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})$, où a,b, a',b' sont des nombres entiers; et si p divise seulement l'un de ces nombres: alors p divise nécessairement le facteur où ce nombre n'entre pas.

Démonstration. On a $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) = aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1} = c+d\sqrt{-1}$; il faut donc que p divise c et d (1); supposons encore que p divise b' sans diviser a'; donc $\frac{c+bb'}{p}$, $\frac{d-ab'}{p}$, ou bien $\frac{aa'}{p}$, $\frac{ba'}{p}$ sont entiers; mais p est premier avec a'; donc $\frac{a}{p}$ et $\frac{b}{p}$ sont des nombres entiers. C. Q. F. D. (D.)

4. *Proposition III.* Tout nombre premier p qui, dans un produit tel que $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})(a''+b'\sqrt{-1})$.... divise seulement dans chaque facteur l'un des deux nombres entiers a, b; a', b'; a'', b''; ..... ne divise pas le produit.

Démonstration. Ce produit peut se mettre sous la forme $(a+b\sqrt{-1})(P+Q\sqrt{-1})$, où P et Q sont des nombres entiers; donc si ce produit était divisible par p, le même nombre premier devrait diviser $P+Q\sqrt{-1}$, car p ne divise que l'un des deux nombres a, b (3) ; de même, $P+Q\sqrt{-1}=(a'+b'\sqrt{-1})(P''+Q''\sqrt{-1})$; par le même raisonnement, p devrait diviser $P''+Q''\sqrt{-1}$; en continuant, on parviendrait à démontrer que p devrait diviser l'un des facteurs du produit ; ce qui est impossible. Donc, etc. (D.)

5. *Définition.* Un nombre de la forme $a+b\sqrt{-1}$ est dit *nombre complexe entier*, lorsque a et b sont des nombres entiers ; si a et b ne sont pas des nombres entiers, le nombre est *complexe fractionnaire.* (D.)

6. *Proposition IV.* Soit l'équation $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots a_n=0$ (1) ; les coefficients a_1, a_2, ... a_n étant des nombres complexes entiers, l'équation ne peut admettre des racines complexes fractionnaires.

Démonstration. Supposons que l'équation (1) ait une racine complexe fractionnaire de la forme $\frac{a}{b}+\frac{c}{e}\sqrt{-1}$; $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{e}$ peuvent être supposés irréductibles ; soit d le plus grand commun diviseur de b et e ; de sorte que l'on ait $b=db'$; $c=de'$; b' et e' seront des nombres premiers entre eux. Donc $\frac{a}{b}+\frac{c}{e}\sqrt{-1}=\frac{ae'+cb'\sqrt{-1}}{db'e'}$ (2) ; soit p un nombre premier facteur de b' ; p divise donc cb' ; il divise aussi b ; donc il ne divise pas a, puisque a et b sont premiers entre eux ; et par une raison analogue, p ne divise pas e' ; par conséquent le second membre de l'identité (2) est aussi un nombre complexe fractionnaire. Donc aussi $\frac{(ae'+cb'\sqrt{-1})^n}{db'e'}$ est un nombre complexe fractionnaire (Prop. III).

Or en substituant $\frac{ae'+cb'\sqrt{-1}}{db'e'}$ à la place de x dans l'équation (1) et multipliant par $(db'e')^{n-1}$, on déduit

$\frac{(ae'+cb'\sqrt{-1})^n}{db'e'} = \mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-1}$, où M et N sont des nombres entiers ; équation impossible, puisque le premier membre est un nombre complexe fractionnaire. Donc l'équation n'a pas de racine complexe fractionnaire. (D.)

7. *Problème I.* Étant donnée l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots\ldots a_n = 0$, où les coefficients a_0, a_1, a_2 ..... sont des nombres complexes quelconques, trouver les racines complexes ?

Solution. En chassant les dénominateurs, on peut toujours ramener l'équation à une autre dont les coefficients sont des nombres complexes entiers ; nous supposerons donc de suite que les coefficients a_0, a_1, a_2 ..... a_n sont des nombres complexes entiers ; faisons $x = \frac{z}{a_0}$; et chassant les dénominateurs, on obtient une équation en z, où z^n a pour coefficient l'unité, et dont tous les autres coefficients sont des nombres complexes entiers ; conséquemment l'équation en z ne peut admettre que des racines complexes entières (Propos. IV) ; le problème est donc ramené à trouver les racines complexes entières. (D.)

8. *Problème II.* Étant donnée l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots a_n = 0$, les coefficients sont des nombres complexes entiers ; trouver les conditions auxquelles doit satisfaire une racine complexe entière.

Solution. $x = a + b\sqrt{-1}$; a et b étant des nombres entiers ; on a

$$a_0(a+b\sqrt{-1})^n + a_1(a+b\sqrt{-1})^{n-1} + a_2(a+b\sqrt{-1})^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}(a+b\sqrt{-1}) + a_n = 0 ;$$

d'où

$$a_0(a+b\sqrt{-1})^{n-1} + a_1(a+b\sqrt{-1})^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} = \frac{-a_n}{a+b\sqrt{-1}}.$$

Le premier membre est un nombre complexe entier; donc a_n est divisible par $a+b\sqrt{-1}$; et par conséquent $a_n(a-b\sqrt{-1})$ est divisible par a^2+b^2; ainsi le dernier coefficient multiplié par $a-b\sqrt{-1}$ doit être divisible par le carré du module; première condition; désignons le quotient par $c+d\sqrt{-1}$; on en déduit

$$a_0(a+b\sqrt{-1})^{n-2}+\ldots..+a_{n-2}=\frac{-c-d\sqrt{-1}-a_{n-1}}{a+b\sqrt{-1}}=$$

$$=\frac{-e-f\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}=\frac{-(a-b\sqrt{-1})(e+f\sqrt{-1})}{a^2+b^2}.$$

Ainsi, le premier quotient augmenté du coefficient a_{n-1}, et multiplié par $a-b\sqrt{-1}$, doit être divisible par le carré du module; seconde condition; et ainsi de suite; la dernière condition est que le dernier quotient soit égal à $-a_0$; conditions qui existent aussi pour les racines réelles entières; mais alors b étant nul, la multiplication par $a-b\sqrt{-1}$ devient superflue. On démontre aussi, comme pour les racines entières réelles, que si ces conditions existent, la quantité essayée est racine. (D.) (V. t. II, p. 523.)

9. *Proposition V*. Dans toute équation de la forme $(fx)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots.. a_n=0$, où a_1, a_2 ….. a_n sont des coefficients quelconques, le plus grand des modules des coefficients, augmenté de 1, est une limite supérieure des modules des racines imaginaires.

Démonstration. En effet, soit C ce module maximum; le module de fx n'est jamais moindre que celui de $x^n-Cx^{n-1}-Cx^{n-2}-\ldots..-Cx-C$; or, $C+1$ rend $x^n>Cx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots.. Cx+C$; donc, toute valeur de x dont le module n'est pas inférieur à $C+1$, ne saurait annuler $f(x)$; donc $C+1$ est une limite supérieure des modules des racines imaginaires. (F.)

10. *Problème III.* Trouver les racines complexes entières d'une équation.

Solution. Soit l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots +$ $a_n = 0$; a, a_1 ..... sont des nombres complexes entiers. Soit $C + 1$ le plus grand module des coefficients; on considère tous les diviseurs de $a_n(a - b\sqrt{-1})$ compris entre 0 et $(C+1)^2$. On rejette les diviseurs qui ne peuvent se décomposer en la somme de deux carrés ; soit D un diviseur compris entre 0 et $(C+1)^2$ et étant la somme de deux carrés $a^2 + b^2$, il y aura à essayer les quatre valeurs $a + b\sqrt{-1}$; $-a + b\sqrt{-1}$; $b + a\sqrt{-1}$; $-b + a\sqrt{-1}$; ce même essai suffit aussi pour les conjugués de ces nombres. (F).

11. *Proposition VI.* $a + b\sqrt{-1}$ n'est pas racine complexe entière de $f(x) = 0$, 1° si $(a-1)^2 + b^2$ ne divise pas $f(1)$; 2° si $(a+1)^2 + b^2$ ne divise pas $f(-1)$; 3° si b^2 ne divise pas $f(a)$.

Démonstration. Si $a + b\sqrt{-1}$ est une racine complexe entière, on a l'identité $f(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)\varphi x$; tous les coefficients de φx sont entiers; faisant dans cette identité successivement $x = 1$, $x = -1$, $x = a$, l'on obtient

$$f(1) = ((a-1)^2 + b^2)\varphi(1) ; f(-1) = ((a+1)^2 + b^2)\varphi(-1);$$
$$fa = b^2\varphi(a) ;\ \text{C. Q. F. D.}\ \text{(F.)}$$

12. *Exercice :*

$$(2 + \sqrt{-1})x^5 + (1 - 2\sqrt{-1})x^4 - (41 + 37\sqrt{-1})x^3 -$$
$$-(213 - 93\sqrt{-1})x^2 + (145 + 105\sqrt{-1})x + 350 - 50\sqrt{-1} = 0.$$

Les racines sont

$1 + \sqrt{-1}$; $-2 + \sqrt{-1}$; $-4 - 3\sqrt{-1}$; $2\sqrt{-1}$; 5 (D.)