NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations d'identité et équations fondamentales relatives aux courbes de second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 416-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__416_1>

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux courbes de second degré.

(Voir t. II, page 532.)

XLVIII. *Transformation des courbes.*

LEMME. Si dans une équation algébrique à deux inconnues x, y du degré m, on remplace respectivement les deux variables par les expressions ayant même dénominateur,

$$\frac{ax+by+c}{dx+ey+f},\quad \frac{a'x+b'y+c'}{dx+ey+f},$$

les neuf coefficients donnant huit rapports, l'équation résultante est encore du degré m.

Démonstration. Soit l'équation $F(x, y) = P_m + \ldots P_n + \ldots$

(*) Claudii Mydorgii Patricii Parisini prodromi catopticorum et diopticorum, sive, conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria prævii et facem præferentis, libri quatuor priores. D. A. L. G. Parisiis. 1'
premier traité méthodique des sections coniques en F'
d'abord en deux livres en 1631. Les énoncés des qu'
le synopsis du P. Mersenne.

$P_0 = 0$ où P_m, P_n sont les fonctions *homogènes* des degrés m et n, etc.; en opérant la substitution indiquée, P_m devient une fonction de degré m divisée par $(dy+ex+f)^m$, et P_n une fonction de degré n divisée par $(dy+ex+f)^n$ et $m>n$; multipliant donc toute l'équation par $(dy+ex+f)^m$, on aura une nouvelle équation, fonction entière et du degré m.

Observation. Ce résultat n'aurait pas lieu, si les expressions fractionnaires étaient de dénominations différentes.

XLIX. La première équation représentant une ligne plane de degré m, la seconde équation représentera une ligne de même degré, une ligne *transformée*, rapportée aux anciens ou à de nouveaux axes. Nous verrons plus loin que cette méthode de transformation, due originairement à Newton, et généralisée par Waring (*Proprietates curvarum algebraicarum*, p. 240), est d'une extrême fécondité; à son aide, on transporte les propriétés connues d'une courbe, dans une autre courbe de même espèce. En disposant des huits rapports indéterminés, on peut mettre en relation des courbes à branches infinies avec des courbes fermées, des hyperboles avec des cercles, etc.; et sachant mener des tangentes à l'une de ces courbes, on fait de suite construire la tangente à la courbe transformée, etc., etc. C'est aussi la théorie analytique des méthodes graphiques, dites projectives, perspectives, etc. Dans ces derniers temps, M. Lamé (*) a donné la plus grande extension possible à ce système, en remplaçant les trois variables dans les équations des surfaces, par des fonctions quelconques et déduisant les relations entre la surface primitive et les surfaces transformées.

(*) Auteur de l'Examen des differentes méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie, in-8°. en 124 pages, 1818. Opuscule précieux, auquel se rattachent les principaux progrès de la géométrie analytique, et qu'on devrait toujours citer; aussi n'en parle-t-on jamais.

L. *Changement des coordonnées.*

PROBLÈME. Quelles valeurs doit-on donner aux neufs coefficients, pour que la courbe transformée se confonde avec la courbe donnée.

Solution. 1° Si les axes doivent rester les mêmes, il suffit évidemment de faire $a=b'=f=1$, et de rendre nul les six autres coefficients : 2° si les axes changent il faut faire

$$d=e=0,\ f=1,$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\sin(Y-X')}{\sin Y}, & b &= \frac{\sin(Y-Y')}{\sin Y} \\ a' &= \frac{\sin X'}{\sin Y}, & b' &= \frac{\sin Y'}{\sin Y} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

c et c' sont les coordonnées de la nouvelle origine, relativement aux anciens axes; les grandes lettres désignent les angles formés par les axes correspondants et l'ancien axe des X.

Observation I. Cette solution est indiquée dans tous les ouvrages élémentaires. On peut supposer d'abord que l'origine ne se déplace pas. Alors le problème devient cette question de tétragonométrie : dans un quadrilatère connaissant tous les angles et deux côtés adjacents, déterminer les deux autres côtés. On peut ramener la question à la trigonométrie, et c'est ce qu'on fait ordinairement; mais il vaut mieux avoir recours au principe général qui sert de base à la polygonométrie, plane ou gauche; savoir, que la somme *algébrique* des projections des côtés d'un polygone, plane ou gauche, sur une droite fixe, est nulle. Parce que cette même méthode sert aussi au changement de coordonnés dans l'espace où il s'agit d'un hexagone gauche.

Observation II. Carnot est, je crois, le premier qui ait désigné les angles des axes par les deux lettres qui servent à désigner ees axes. D'après cette notation commode, il faudrait écrire Y', X; X', X, etc., pour marquer les angles que forment les axes des Y' et des X' avec l'axe des X, etc.; dans le cas actuel, on peut sans inconvénients supprimer la lettre X et la sous-entendre (Comte, *Géométrie analytique*, page 96).

Corollaire I. Si on déplace l'origine sans changer les axes de direction; alors $X'=0$, $Y'=Y$, donc $a=1$, $b=0$, $a'=0$, $b'=1$; ce qui est d'ailleurs d'une évidence intuitive. Ainsi on remplace x par $x+c$, et y par $y+c'$, donc dans l'équation transformée P_m reste le même, et le terme tout connu est égal à $F(c, c')$.

Corollaire II. Si l'on conserve de position l'axe des X, alors $X'=0$, $a=1$;

$$b=\frac{\sin(Y-Y')}{\sin Y}, \quad a'=0, \quad b'=\frac{\sin Y'}{\sin Y}, \quad c'=0,$$

et si l'on conserve de position l'axe des Y, on a $Y=Y'$, donc

$$a=\frac{\sin(Y-X')}{\sin Y}. \quad b=0, \quad a'=\frac{\sin X'}{\sin Y}, \quad b'=1, \quad c=0.$$

LI. *Définitions relatives au point.*

Un point d'une courbe est dit *réel*, lorsque ses deux coordonnées sont réelles.

Le point est *imaginaire*, lorsqu'une de ses coordonnées ou toutes les deux sont imaginaires.

Le point est *ordinaire*, lorsqu'aucune fonction dérivée, d'une ordonnée par rapport à l'autre, à partir de la seconde dérivée, ne devient en ce point ni nulle, ni infinie, ni imaginaire.

Le point est *singulier*, lorsqu'une de ces conditions existe.

Le point est *simple*, lorsque la fonction prime d'une ordonnée prise par rapport à l'autre n'a en ce point qu'une valeur.

Le point est *multiple*, lorsque cette fonction prime a plus d'une valeur.

Le point est à distance *finie*, lorsque les deux coordonnées ont des valeurs finies.

Le point est à distance *infinie*, lorsqu'une de ses coordonnés ou toutes les deux ont des valeurs infinies.

Observation. Ces diverses circonstances peuvent se trouver réunies ; ainsi le même point peut être à la fois singulier, multiple et à distance infinie.

Observation. Nous ne mentionnons pas le cas de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, puisqu'on a des méthodes pour découvrir les valeurs de ces expressions.

LII. Théorème. Une droite coupe toujours une ligne de l'ordre m en m points et pas davantage ; ces points sont réels ou imaginaires, ordinaires ou singuliers, simples ou multiples ; à distances finies ou infinies ; et réciproquement, lorsqu'une droite quelconque ne coupe une ligne qu'en m points, l'équation de la ligne est de degré m.

Démonstration. Une ligne de l'ordre m est représentée par une équation de degre m ; la droite est donnée par une equation du premier degré ; en éliminant une quelconque des deux coordonnées, on obtient une équation du degré m dont les racines sont les secondes coordonnées des points d'intersections. Or ces racines sont au nombre m et pas davantage, réelles ou imaginaires, simples ou multiples, finies ou infinies. Ayant les valeurs des coordonnées, on peut obtenir celles des fonctions dérivées, et par consequent savoir si les points d'intersections sont ordinaires ou singuliers, etc. ; la réciproque est évidente.

Corollaire I. Une fonction symétrique des coordonnées, des points d'intersections, même des *points imaginaires*, a toujours une valeur réelle. C'est une conséquence de la théorie des équations

Corollaire II. Les m points d'intersections donnent lieu à $\frac{m(m-1)}{1.2}$, cordes réelles ou imaginaires, simples ou multiples, finies ou infinies; dans un point multiple de l'ordre n, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ cordes qui deviennent nulles.

Observation. Une ligne de *l'ordre m* est une courbe du *genre* $m-1$; voici à ce sujet les idées de Descartes, point de départ de tout ce qu'on a fait là-dessus. « Je pourrais » mettre ici plusieurs autres moyens pour tracer et conce- » voir des lignes courbes qui soient de plus en plus composées » par degrés à l'infini; mais pour comprendre ensemble » toutes celles qui sont dans la nature, et les distinguer par » ordre en certains genres, je ne sache rien de meilleur que » de dire que tous les points de celles qu'on peut nommer » géométriques, c'est-à-dire qui tombent sous quelque me- » sure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport » à tous les points d'une ligne droite, qui peut être expri- » mée par quelque équation, en tous par une même, et que » lorsque cette équation ne monte que jusqu'au rectangle » de deux quantités indéterminées, ou bien au carré d'une » même, la ligne courbe est du premier et plus simple » genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hy- » perbole et l'ellipse qui soient comprises; mais que lorsque » l'équation monte jusqu'à la troisième ou quatrième di- » mension des deux, ou de l'une des deux quantités indéter- » minées (car il en faut deux pour expliquer ici le rapport » d'un point à un autre), elle est du second; et que lorsque » l'équation monte jusqu'à la cinquième ou sixième dimen- » sion, elle est du troisième; et ainsi des autres à l'infini. » (*La Géométrie*, livre second, *voir* p. 337, édition Cousin.)

Ainsi, selon Descartes, les courbes des degrés $2n+1$ et $2n+2$ sont du même genre; il choisit pour exemple le lieu géométrique suivant, le premier qu'on ait trouvé par la méthode cartésienne. Soit GAL un triangle rectangle en A, G et A sont des sommets fixes sur AL prolongée, on prend LK d'une longueur constante; par K on mène une droite de direction donnée, cette droite rencontre l'hypoténuse variable GL en un point C dont Descartes détermine le lieu, qu'il trouve être une hyperbole, courbe du premier genre. Il énonce cette proposition générale; si la ligne qui passe par le point K, au lieu d'être une droite est une ligne donnée du genre m, et se mouvant parallèlement à elle-même, le lieu du point C est une ligne du genre $m+1$; les élèves en trouveront facilement la démonstration. Telle est selon Descartes la génération organique des courbes géométriques de tous les genres, et d'une exécution mécanique très-facile; GL est une règle mobile autour de G, et KL une autre règle se mouvant dans une rainure ALK, et poussant devant elle, la règle GL et la courbe donnée; si cette courbe donnée est un cercle, ligne du premier genre, ayant L pour centre et KL pour rayon, le lieu du point C est évidemment une conchoïde, courbe du second genre; il place les courbes qui vont au carré de carré, au même genre que celles qui montent au cube, et celles dont l'équation remonte au carré de cube (sixième degré), au même genre que le *sur-solide* (cinquième degré), parce que, dit-il, *il y a règle générale pour réduire au cube toutes les difficultés qui vont au carré de carré et au sur-solide toutes celles qui vont au carré de cube, de façon qu'on ne doit point les estimer plus composées.* (Même édition, p. 341.)

La Géométrie parut en 1638, année de la naissance de Louis XIV, et quatre années avant la mort de Galilée et la naissance de Newton; ce n'est qu'en 1704, que cet illustre géomètre publia en latin à la suite de l'optique en anglais, la classification des lignes du troisième ordre; en 1706 l'op-

tique fut traduite en latin, par le célèbre philosophe déiste Samuel Clarke, in-4° de 348 pages. Car à cette époque, les philosophes ne croyaient pas encore déroger en s'occupant de physique et de géométrie. Newton fut si satisfait qu'il gratifia le traducteur, de cinq cents livres sterling. A cette traduction est joint l'opuscule de 24 pages : *Enumeratio linearum tertii ordinis*. On voit ici la première théorie exacte des lignes, fondée sur les idées cartésiennes ; cet ouvrage très-rare n'a jamais été traduit en français ; voici le début : « *Lineæ geo-*
» *metricæ secundum numerum dimensionum æquationis qua*
» *relatio inter ordinatas et abscissas definitur, vel (quid perinde*
» *est) secundum numerum punctorum in quibus a linea recta*
» *secari possunt optime distinguuntur in ordines. Qua ratione*
» *linea primi ordinis erit recta sola, eæ secundi sive quadratici*
» *ordinis erunt sectiones conicæ et circulus, et eæ tertii sive cu-*
» *bici ordinis parabola cubica, parabola neiliana, cissois vete-*
» *rum et reliquæ quas hic enumerare suscepimus. Curva autem*
» *primi generis (siquidem recta inter curvas non est nume-*
» *randa), eadem est cum linea secundi ordinis, et curva*
» *secundi generis eadem cum linea ordinis tertii. Et linea*
» *ordinis infinitesimi ea est quam recta in punctis infinitis*
» *secare potest, qualis est spiralis, cyclois, quadratrix et linea*
» *omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas gene-*
» *ratur.* » La parabole cubique, dite aussi cartésienne, est de la forme $y = ax^3$, et la parabole neilienne a pour équation $y^3 = ax^2$, elle est célèbre parce que c'est la première courbe qu'on ait su rectifier ; voici l'origine du nom : Wallis avait indiqué des relations différentielles qui pouvaient amener à découvrir des courbes rectifiables. Un jeune géomètre, Guillaume Neil, indiqua une courbe géométrique, satisfaisant aux relations de Wallis ; et derechef celui-ci trouva que c'était la courbe où le cube de l'ordonnée était proportionnel au carré de l'abscisse ; on a appris depuis que

cette courbe n'est autre que la développée de la parabole ordinaire; et toutes les développées sont rectifiables essentiellement.

LIII. *Définitions relatives aux segments.*

Si l'on prend un point fixe O sur une droite, coupant une ligne de l'ordre m, les distances du point O aux points d'intersections se nomment *segments* de la droite, relatifs au point de l'origine O, et selon que ces segments aboutissent à des points réels ou imaginaires, simples ou multiples, etc. Les segments prennent la même dénomination.

Observation. Ainsi lorsque la droite n'a aucun point de commun avec la ligne de l'ordre m, tous les segments sont imaginaires, ont une existence purement analytique, mais une fonction symétrique de ces segments a une valeur réelle.

(*La suite prochainement.*)