NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorie des foyers, d'après Apollonius

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 412-416

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__412_1>

THÉORIE DES FOYERS,

d'après Apollonius.

---

1. Il est nécessaire, pour comprendre le langage d'Apollonius, d'expliquer certaines dénominations en usage chez les anciens.

Appliquer un rectangle à une droite, c'est partager cette droite en deux segments, tels que le rectangle construit sur ces segments, soit égal au rectangle donné.

Nous disons *égal au rectangle*, car les anciens ne se servaient pas du mot *équivalent* introduit, je crois, par Legendre.

Le mot *appliquer* (παραβάλλω), vient de ce que le rectangle était joint, appliqué à la droite donnée; soit AB cette droite BC le prolongement de AB; et BCDE le rectangle donné, il s'agit de partager AB en deux segments, tels que le rectangle construit avec ces segments, soit égal au rectangle BCDE; on voit que BCDE est joint à la droite AB;

une droite ordonnée à un diamètre; c'est une droite parallèle au diamètre conjugué.

Figure d'un diamètre, (ειδόσ του διαμετρου): c'est le rectangle construit sur ce diamètre et son paramètre.

On voit que la *figure d'un diamètre*, est équivalente au carré du diamètre conjugué.

Les théorèmes sur les foyers sont dans le livre III ; nous en extrayons les propositions relatives à notre objet.

Proposition XLII.

Si dans l'hyperbole, ou dans l'ellipse, ou dans la circonférence du cercle, ou dans les *sections opposées*, on mène par les extrémités d'un diamètre deux droites ordonnées à ce diamètre; et encore une autre droite tangente; celle-ci retranche des deux premières, des longueurs renfermant un rectangle égal au quart de la figure faite sur le diamètre; en d'autres termes, dans le trapèze formé par un diamètre, les deux tangentes parallèles menées par ses extrémités, et une troisième tangente quelconque, le produit des deux bases est équivalent au carré du demi-diamètre conjugué. Lorsque la troisième tangente est parallèle au diamètre, le trapèze se change en parallélogramme, et la proposition devient intuitive. Cette observation est d'Apollonius. Par *section opposée*, on entend les deux branches opposées de l'hyperbole, qu'Apollonius considère toujours à part.

Proposition XLV.

Si dans l'hyperbole, ou dans l'ellipse, ou dans la circonférence du cercle, ou dans la *section opposée*, on mène des perpendiculaires aux extrémités de l'axe, et qu'on applique à l'axe de part et d'autre un rectangle égal au quart de la figure; qu'on mène une droite touchant la section et coupant les *perpendiculaires*, les droites menées par les points d'intersections, aux points *faits par application*, forment des angles droits, en ces points.

Observation : le quart de la figure sur l'axe transverse, c'est le carré du demi-axe conjugué ; si on applique à l'axe transverse un rectangle équivalent au carré du demi-axe conjugué, c'est-à-dire si on divise cet axe en deux segments additifs pour l'ellipse, soustractifs pour l'hyperbole, dont le produit soit égal au carré du demi-axe conjugué, on obtient sur cet axe et pour chaque extrémité, *un point fait par application; ce sont là les foyers*, mots qu'Apollonius ne connaît pas. Ils désignent toujours ces points par cette phrase, *points faits par application* (τὰ εκ τῆσ παραβολῆσ γενεθέντα σημεῖα). — Ainsi, la proposition XLV peut se traduire ainsi en langage moderne : toute tangente interceptée entre deux tangentes menées par les extrémités de l'axe transverse, est vue du foyer sous un angle droit.

On voit que cette détermination du foyer n'est pa pratiable dans la parabole; mais Apollonius ne parle nullement du foyer de cette courbe.

Proposition XLVI.

Même construction que dans la précédente ; soient A et B, les extrémités de l'axe transverse ; AG, BD, les perpendiculaires élevées sur cet axe ; DFG une tangente quelconque, et E le point de contact ; F et F′ les deux foyers ; on aura angle FDF′ = angle FGF′.

Proposition XLVII.

Même construction que dans la précédente ; soit T l'intersection de DF′ et de GF ; la droite TE est perpendiculaire sur la tangente DFG.

Cette belle propriété est peu connue.

Apollonius démontre que si on abaisse du point T, une perpendiculaire sur la tangente, elle se confond avec TE.

PROPOSITION XLVIII.

Même construction, les rayons vecteurs font des angles égaux avec la tangente.

PROPOSITION XLIX.

Même construction; si d'un foyer on abaisse une perpendiculaire sur une tangente, et qu'on joigne le pied de la perpendiculaire avec les extrémités de l'axe transverse, ces deux droites sont perpendiculaires, l'une sur l'autre.

PROPOSITION L.

Même construction ; si l'on mène par le centre une parallèle au rayon vecteur qui passe par le point de contact, la portion de cette parallèle comprise entre le centre et la tangente est égale à la moitié de l'axe transverse.

PROPOSITION LI.

Si dans l'hyperbole ou dans les sections opposées, on mène des deux foyers, deux droites au même point de la section, la plus grande surpasse la plus petite, d'une longueur égale à l'axe transverse.

PROPOSITION LII.

Si dans l'ellipse, on mène des deux foyers, deux droites à un même point de la section, la somme de ces droites est égale à l'axe transverse.

Apollonius passe toujours d'une proposition à la suivante; les propositions LI et LII sont les dernières relatives aux foyers; il n'y en a point d'autres de cet auteur; il ne fait aucune mention de directrices.

Observation. Il existe *des points faits par application* sur tous les diamètres de l'hyperbole, et sur les diamètres de l'ellipse plus grands que leurs diamètres conjugués. M. le capitaine Jacob en a donné le lieu géométrique (t. II, p. 138).

Claude Mydorge dans *ses coniques* (*), donne aux *points d'application* faits sur l'axe, le nom d'Ombilics (Umbilicus). — Descartes, dans sa Dioptrique, dit : « à cause de certaines propriétés de ces points, que vous entendrez ci-après, nous les nommerons les points brûlants » (*OEuvres*, V. p. 94. Cousin) ; il est probable que cette expression a été changée en celle de *foyer*. Tm.