Desboves

Note sur les conditions de réalité des racines de l'équation générale du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 387-390

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__387_1>

NOTE

sur les conditions de réalité des racines de l'équation générale du quatrième degré.

PAR M. DESBOVES,
professeur à Mâcon.

Quand on cherche les conditions de réalité des racines de l'équation générale du 4^e degré, en se servant de l'équation aux carrés des différences, ou du théorème de M. Sturm, on est conduit à des calculs assez longs. Mais nous allons faire voir dans cette note qu'on peut, sans recourir à ces deux méthodes, déterminer les conditions de réalité d'une manière très-simple. L'équation générale du 4^e degré peut toujours être mise sous la forme

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0\,;$$

et si l'on désigne par $x^2 + px + q$ un facteur quelconque du second degré du premier membre, on trouve très-facilement pour l'équation qui détermine p,

$$p^6 + 2Qp^4 + (Q^2 - 4S)p^2 - R^2 = 0.$$

En posant $z = p^2$, on a

$$z^3 + 2Qz^2 + (Q^2 - 4S)\,z - R^2 = 0\,,$$

et les racines de l'équation en z sont les carrés des sommes des racines de l'équation proposée prises deux à deux.

Il est évident, d'abord, que si les racines de l'équation proposée sont réelles, l'équation en z a toutes ses racines réelles et positives, et par conséquent qu'elle est complète et n'a que des variations. Nous allons faire voir maintenant que réciproquement, si les conditions de réalité des racines de l'équation en z sont remplies, et que cette équation ne présente que des variations, l'équation proposée aura toutes ses racines réelles. En effet, lorsque les conditions précédentes sont remplies, toutes les racines de l'équation en z sont positives, et nous allons voir que cela ne peut arriver qu'autant que toutes les racines de l'équation du 4^e degré sont réelles.

Si les racines de l'équation du 4^e degré ne sont pas toutes réelles, il pourra se présenter deux cas : ou bien les quatre racines seront imaginaires, ou bien il y en aura deux réelles et deux imaginaires.

Si les quatre racines sont imaginaires, on voit, en se rappelant que leur somme est égale à zéro, qu'elles seront $a \pm b\sqrt{-1}$, $-a \pm b'\sqrt{-1}$, et que par suite les racines de l'équation en z seront $4a^2$, $-(b+b')^2$, $-(b-b')^2$. Il y aura donc des racines négatives dans l'équation en z, les quantités $b+b'$, $b-b'$ ne pouvant être nulles en même temps, puisqu'on en concluerait $b=0$, $b'=0$, ce qui est contre l'hypothèse (*).

Si deux racines sont imaginaires et les deux autre réelles; en ajoutant une racine réelle à une racine imaginaire, on aura toujours une quantité imaginaire, et en l'élevant au carré, on aura une quantité imaginaire ou une quantité négative. Ce dernier cas arrivant seulement lorsque la racine

(*) On peut même dire qu'aucune racine n'est nulle dans l'équation en z, si on suppose R different de zéro. Or c'est ce qu'on peut toujours supposer ici, le cas de $R=0$ pouvant être traité directement.

réelle est égale et de signe contraire à la partie réelle de la racine imaginaire (*).

On peut donc conclure de ce qui précède, que c'est seulement dans le cas où l'équation du 4e degré a toutes ses racines réelles, que l'équation en z a toutes ses racines *réelles* et *positives*.

Remarquons que nous n'avons pas dû ici, comme on le fait pour l'équation aux carrés des différences, nous borner à la seule condition que l'équation en z n'eût que des variations. De ce que l'équation en z est complète et n'a que des variations, on en conclut bien, il est vrai, que cette equation n'a pas de racine négative; mais il ne résulte pas de là, comme dans le cas de l'équation aux carrés des différences, qu'il n'y a pas de racines imaginaires dans l'équation proposée. Ainsi, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, il est évident que dans le cas où il y a dans la proposée deux racines réelles et deux imaginaires, il arrivera généralement que l'équation en z aura une racine positive et deux racines imaginaires.

La condition que l'équation en z n'ait que des variations donne immédiatement

$$Q < 0, \quad Q^2 - 4S > 0.$$

On exprimera ensuite que l'équation en z a ses racines réelles, en la trausformant en $z'^3 + Az' + B = 0$ et appliquant à cette équation la condition connue $4A^3 + 27B^2 < 0$.

B et A sont, comme on sait, les résultats de la substitution de $-\frac{2}{3}Q$ dans le premier membre de l'équation en z et dans sa dérivée. En faisant ces substitutions, on trouve

(*) La somme des racines étant égale à zéro, il faut pour qu'une racine réelle puisse satisfaire à la condition précédente, qu'il y ait deux racines réelles egales dans l'équation du 4e degré.

$$4\left(\frac{1}{3}Q^2+4S\right)^3-27\left(\frac{-2}{27}Q^3+\frac{8}{3}QS-R^2\right)^2>0\,;$$

et en développant,

$$4^4S^3+4^2SQ^4-2^3.4^2S^2Q^2-3^3R^4-4R^2Q^3+3^2\times 4^2QSR^2>0.$$

Cette inégalité et les deux précédentes sont aussi celles que Lagrange a déduites du calcul de l'équation aux carrés des différences. (Rés. des éq. num., p. 48, 1808.)

Note. Nous croyons utile de consigner ici les fonctions *sturmiennes* (*) pour l'équation complète du quatrième degré, telles qu'elles ont été calculées par M. Midy (Du théorème de M. Sturm, p. 27, 1836).

$$X=x^4+px^3+qx^2+rx+s\,,\quad X_1=4x^3+3px^2+2qx+r.$$

Faisons

$$3p^2-8q=A\,;\ pq-6r=B\,;\ pr-16s=C\,;\ 9p^3-32pq+48r=D,$$

on aura

$$X_2=Ax^2+2Bx+C\,;\quad X_3=[4AC+2BD-2qA^2]x+CD-A^2r,$$

ou $\qquad X_3=Mx+N\,;\ X_4=N[2MB-3AN]-CM^2.$

Lorsque $p=0$, on a

$$A=-8q\,;\quad B=-6r\,;\quad C=-16s\,;\quad D=48r\,;$$

$$M=64[8qs-9r^2-2q^3]\,;\ N=-64r(48s+q^2)\,;$$

$$X_4=2^7.3r^2(8qs-9r^2-2q^3)(48s+q^2)+3.2^9.qr^2(48s+q^2)^2+$$
$$+2^{10}.s(8qs-9r^2-2q^3)^2.$$

D'après la théorie connue, A doit être positif, M négatif, et X_4 positif. Ainsi $q<0$.

Faisons $-q=q'$, alors on aura

$$2q'^3<8q's+9r^2\,;\ \text{ou}\ q'^2<4s+\frac{9r^2}{2q'}\ \text{ et }\ X_4>0.$$

Ces inégalités de condition ne sont pas les mêmes que celles que donne l'équation aux carrés des différences. Cette diversité n'est-elle qu'apparente? Tm.

(*) Nous hasardons cette expression : on dit bien, les nombres Bernoulliens.