NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HUET

Questions d'examen. Surfaces et volumes engendrés par les polygones réguliers, lorsqu'ils tournent autour d'une perpendiculaire au diamètre du cercle circonscrit menée par le sommet auquel aboutit ce diamètre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 361-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__361_1>

QUESTIONS D'EXAMEN.

Surfaces et volumes engendrés par les polygones réguliers, lorsqu'ils tournent autour d'une perpendiculaire au diamètre du cercle circonscrit menée par le sommet auquel aboutit ce diamètre.

PAR M. HUET,
ancien professeur de mathématiques spéciales à l'École de Sorrèze,
régent de mathématiques spéciales au collége de Pamiers.

Nous adopterons dans la résolution de ces questions, les mêmes notations que celles que nous avons employées p. 353, t. II; seulement, pour varier les difficultés, nous chercherons directement les expressions des volumes et des surfaces que nous nous nous proposons de trouver en fonction du rayon R du cercle circonscrit. La marche que nous allons suivre est d'ailleurs la même.

SURFACES ENGENDRÉES.

1° *Triangle* (fig. 46).

$$\text{Surf. T} = \text{surf. CB} + 2\,\text{surf. AB} = 2\pi \text{BF.CB} + 2\pi \text{BF.AB} =$$
$$= 4\pi.\text{AB.BF} = 3\text{AB}.2\pi.\frac{2\text{BF}}{3} = 3\text{AB}.2\pi\text{AO}\,; \quad (1)$$

or $\qquad \text{AB} = \text{R}\sqrt{3}\,, \quad \text{AO} = \text{R}\,;$

donc $\qquad \text{surf. T} = 3.\text{R}\sqrt{3}\,.2\pi\text{R} = 6\pi\text{R}^2\sqrt{3}.$

2° *Carré* (fig. 47).

$$\text{Surf. C} = 2(\text{surf.AB}+\text{surf.CB}) = 2\pi\{\text{BE.AB}+\text{CB(CA+BE)}\} =$$
$$= 2\pi\text{AB}(2\text{BE}+\text{CA}) = 4\text{AB}.2\pi\text{OA}\,; \qquad (2)$$

or $\text{AB} = \text{R}\sqrt{2}$, et $\text{OA} = \text{R}$; donc surf. $\text{C} = 8\pi\text{R}^2\sqrt{2}$.

3° *Pentagone* (fig. 48).

$$\text{Surf. P} = 2\,\text{surf. AB} + 2\,\text{surf. CB} + \text{surf. EC} = 2\pi\text{BH.AB} +$$
$$+ 2\pi\text{BC}(\text{CG} + \text{BH}) + 2\pi\text{CG.EC} = 4\pi\text{AB}(\text{BH} + \text{CG})\,;$$

or on a

$$\text{AB} = \frac{\text{R}}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\ \text{BF} = \text{D} = \frac{\text{AB}}{2}(1+\sqrt{5}) =$$
$$= \frac{\text{R}}{4}(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{\text{R}}{4}\sqrt{40+8\sqrt{5}} = \frac{\text{R}}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,;$$
$$\text{AH} = \frac{\text{D}}{2} = \frac{\text{R}}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$
$$\text{BH} = \sqrt{\overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{AH}}^2} = \sqrt{\frac{\text{R}^2}{4}(10-2\sqrt{5}) - \frac{\text{R}^2}{16}(10+2\sqrt{5})} =$$
$$= \frac{\text{R}}{4}\sqrt{30-10\sqrt{5}} = \frac{\text{R}}{4}(5-\sqrt{5})\,;$$

$$CG=AD=\sqrt{D^2-\overline{DC}^2}=\sqrt{\frac{R^2}{4}(10+2\sqrt{5})-\frac{R^2}{16}(10-2\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{R}{4}\sqrt{30+10\sqrt{5}}=\frac{R}{4}(5+\sqrt{5}).$$

Donc

$$\text{surf. P}=4\pi.R\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left\{\frac{R}{4}(5-\sqrt{5})+\frac{R}{4}(5+\sqrt{5})\right\}=$$

$$=5\pi R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

4° *Hexagone* (fig. 49).

$$\text{Surf. H}=2(\text{surf. AB}+\text{surf. BC}+\text{surf. CD})=$$

$$=2\pi\left\{BG.AB+\overline{CG}^2-\overline{BG}^2+DC(DA+CG)\right\}=$$

$$=2\pi\left\{BG.AB+(CG+BG)(CG-CG)+DC(DA+CG)\right\}=$$

$$=2\pi AB(BG+2DA+CG)=2\pi AB.3DA=6AB.2\pi OA\,; \quad (3)$$

or $\quad OA=AB=R, \quad$ donc $\quad \text{surf. H}=12\pi R^2.$

5° *Octogone* (fig. 50).

$$\text{Surf. O}=2(\text{surf. AB}+\text{surf. BC}+\text{surf. CD}+\text{surf. ED})=$$

$$=2\pi\left\{AB.BF+BC(BF+CG)+DC(CG+DF)+ED(DF+AE)\right\}=$$

$$=2\pi AB(2BF+2CG+2DF+AE)=2\pi AB.4AE=8AB.2\pi AO; \quad (4)$$

or $\quad AB=R\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad OA=R\,;$

donc $\quad \text{surf. O}=16\pi R^2\sqrt{2-\sqrt{2}}.$

6° *Décagone* (fig. 51).

$$\text{Surf. D}=2(\text{surf. AB}+\text{surf. BC}+\text{surf. CD}+\text{surf. ED}+\text{surf. EF})=$$

$$=2\pi\left\{\begin{array}{r}AB.BG+BC(BG+CK)+\overline{DK}^2-\overline{CK}^2+ED(DK+EG)+\\+EF(EG+FA)\end{array}\right\}=$$

$$=2\pi\left\{\begin{array}{r}AB.BG+BC(BG+CK)+(DK+CK)(DK-CK)+\\+ED(DK+EG)+EF(EG+FA)\end{array}\right\}=$$

$$=2\pi AB(2BG+CK+DK+2EG+2FA)=$$

$$=2\pi AB\left\{2(BG+EG)+3FA\right\}=2\pi AB.5FA=10AB.2\pi AO; \quad (5)$$

or $$AB = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad OA = R;$$

donc $$\text{surf. D} = 10\pi R^2(\sqrt{5} - 1).$$

7° *Dodécagone* (fig. 52).

$$\text{Surf. D} = 2\left(\begin{matrix}\text{surf. AB} + \text{surf. BC} + \text{surf. DC} + \text{surf. DE} + \\ + \text{surf. FE} + \text{surf. GF}\end{matrix}\right) =$$

$$= 2\pi\left\{\begin{matrix}AB.BH + BC(BH + CK) + CD(CK + DL) + \\ + ED(DL + EK) + FE(EK + FH) + GF(FH + AG)\end{matrix}\right\} =$$

$$= 2\pi AB(2BH + 2CK + 2DL + 2EK + 2FH + AG) =$$

$$= 2\pi AB\,\{2(BH + FH) + 2(CK + EK) + 2DL + GA\} =$$

$$= 2\pi.AB.6GA = 12AB.2\pi OA; \qquad (6)$$

or $$AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \quad OA = R;$$

donc $$\text{surf. D} = 12\pi R^2(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Les expressions (1), (2), (3), (4), (5), (6), n'étant autre chose que la traduction du théorème de Guldin, on en conclut que ce théorème conduit immédiatement aux mêmes expressions que celles que nous fournit la géométrie.

Quant à la surface engendrée par le pentagone, on a, en appliquant le théorème de Guldin : surf. P $= 5AB.2\pi R$; or $AB = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; donc surf. P $= 5\pi R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; résultat identique à celui que nous avons trouvé.

On pourrait chercher, d'une manière analogue, les expressions de ces surfaces en fonction du côté c, ou en fonction de l'apothème r. La géométrie et le théorème de Guldin pourraient encore servir mutuellement de vérification. En cherchant, par exemple, ces surfaces en fonction de c, on trouve :

1° Triangle $\quad$ surf. T $= 2\pi c^2\sqrt{3}$;

2° Carré $\quad$ surf. C $= 4\pi c^2\sqrt{2}$;

3° Pentagone surf. $P = \pi c^2 \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$;

4° Hexagone surf. $H = 12\pi c^2$;

5° Octogone surf. $O = 8\pi c^2 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$;

6° Décagone surf. $D = 18\pi c^2 (1 + \sqrt{5})$,

7° Dodécagone surf. $D = 12\pi c^2 (\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

(*La suite prochainement.*)