BOUVERAT

Théorème relatif au plus grand commun diviseur algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 329-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__329_1>

THÉORÈME

RELATIF AU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE.

PAR M. BOUVERAT,
ancien élève de l'École polytechnique.

Théorème. Soit proposé de trouver le plus grand commun diviseur entre les deux polynômes

$$a_1x^m + a_2x^{m-1} + a_3x^{m-2} + a_4x^{m-3} + a_5x^{m-4}, + \text{etc.}$$
$$b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + b_3x^{m-3} + b_4x^{m-4} + b_5x^{m-5} + \text{etc.}$$

Le quotient sera du premier degré et de la forme

$$\alpha x - 6.$$

Le reste devant être du degré $m - 2$ pourra être représenté par

$$A_1x^{m-2} + A_2x^{m-3} + A_3x^{m-4} + A_4x^{m-5} + \text{etc.}$$

On multipliera le premier polynôme par b_1^2, et on effectuera la division. On trouvera l'expression du reste qui est représentée dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|l}
a_1b_1^2 & x^m+a_2b_1^2 & x^{m-1}+a_3b_1^2 & x^{m-2}+a_4b_1^2 & x^{m-3}+a_5b_1^2 & x^{m-4}+\text{etc.} \\
-b_1\alpha & -b_2\alpha & -b_3\alpha & -b_4\alpha & -b_5\alpha & \\
 & +b_1\beta & +b_2\beta & +b_3\beta & +b_4\beta &
\end{array}$$

Les coefficients de x^m et x^{m-1} devant être nuls, on aura, pour déterminer les valeurs de α et β, les deux relations

$$\left.\begin{array}{r} a_2b_1^2 - b_2\alpha + b_1\beta = 0 \\ a_1b_1^2 - b_1\alpha = 0 \end{array}\right\} \text{ d'où } \quad \begin{array}{l} \alpha = a_1b_1 \\ \beta = a_1b_2 - a_2b_1. \end{array}$$

α et β étant connus, on obtiendra les valeurs des coefficients A_1, A_2, A_3, etc. des termes du reste de la division, au moyen des égalites

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_3b_1^2 - b_3\alpha + b\,\beta\,, \\
A_2 &= a_4b_1^2 - b_4\alpha + b_3\beta\,, \\
A_3 &= a_5b_1^2 - b_5\alpha + b_4\beta\,, \\
A_4 &= a_6b_1^2 - b_6\alpha + b_5\beta.
\end{aligned}$$

La loi de ces coefficients est évidente.

2. Nous allons montrer, par quelques exemples, que ce théorème s'applique à tous les cas qui peuvent se présenter, et indiquer les dispositions qu'il convient de donner aux calculs; ensuite nous ferons connaître certains caractères au moyen desquels on peut s'assurer que deux polynômes sont ou ne sont pas divisibles l'un par l'autre sans effectuer la division ; ce qui évitera toujours de faire la dernière opération dans la recherche du plus grand commun diviseur, soit par la méthode que nous proposons, soit par la méthode connue.

Règle générale. On écrit les deux polynômes l'un au-dessous de l'autre ; on place sur une ligne horizontale les trois multiplicateurs b_1^2, α, β, en ayant sein de supprimer les facteurs communs. On multiplie par b_1^2 les coefficients des termes du dividende, à partir du troisième, et on place les résultats sur une ligne horizontale; on multiplie par α changé de signe les coefficients des termes du diviseur, en commençant par le troisième, et on écrit les produits au-dessous des premiers, dans le même ordre qu'on les a obtenus; on multiplie par 6 les coefficients des termes du diviseur, à partir du second, et on écrit les produits encore au-dessous des précédents. On additionne par colonnes verticales, et les résultats sont les coefficients des termes du reste de la division du premier polynôme par le second.

Cette règle est appliquée à l'exemple suivant que nous avons pris dans le Traité d'Algèbre de M. Choquet :

$$x^5-2x^4-6x^3+4x^2+13x+6$$
$$3x^4+4x^3-6x^2-12x-5$$
$$+9,\ -3,\ +10$$

$$-54+36+117+54$$
$$+18+36+\ 15$$
$$+40-60-120-50$$

1$^{\text{er}}$ reste... x^3+3x^2+3x+1... dans lequel on a supprimé le facteur 4.

$$1,\ -3,\ +5$$

$$-\ 6-12-5$$
$$-\ 9-\ 3$$
$$+15+15+5$$

2$^{\text{e}}$ reste.... 0

La seconde opération est inutile, car il est facile de reconnaître que le premier reste est le diviseur cherché. En effet, toutes les fois que le produit du dernier terme du dividende par b_1^2 est égal et de signe contraire au produit du dernier terme du diviseur par 6, ou lorsque la somme de ces deux produits est nulle, on doit, d'après ce qui précède, trouver zéro pour reste, si l'on effectue la division.

Ainsi ce théorème se réduit à effectuer de simples multiplications sur les coefficients des termes des polynômes proposés, sans faire subir aucune préparation au dividende. On remarque, en outre, qu'en appliquant la méthode ordinaire à l'exemple précédent, il faudrait écrire quarante-trois termes de plus.

3. Dans l'application de ce théorème, on suppose que le dividende contienne toutes les puissances de la lettre par rapport à laquelle il est ordonné depuis m jusqu'au terme indépendant de cette lettre, et de même le diviseur à partir de $m-1$. Quand cela n'a pas lieu, il faut tenir compte des puissances qui manquent, en les considérant comme affectées du coefficient zéro.

Cette circonstance abrége le théorème.

Prenons pour exemple les deux polynômes

$$x^7-3x^5+2x^4+4x^3-3x^2+x+4,$$
$$x^6-2x^4+x^3+x^2+x+4.$$

Comme il faut avoir égard aux rangs des termes, on pourra faire l'opération ainsi qu'elle est représentée dans le tableau suivant :

$$x^7+0x^6-3x^5+2x^4+4x^3-3x^2+x+4$$
$$x^6+0x^5-2x^4+x^3+x^2+x+4$$
$$1,\ -1,\ 0$$

$$-3+2+4-3+1+4$$
$$+2-1-1-1-4$$

1er reste... $-x^5+x^4+3x^3-4x^2-3x+4$

$$1,\ +1,\ +1$$

$$-2+1+1+1+4$$
$$+3-4-3+4$$
$$+1+3-4-3+4$$

2e reste... $x^4+0x^3-3x^2+x+4$... dans lequel on a supprimé le facteur 2.

$$1,\ +1-1$$

$$0$$

D'après la remarque ci-dessus, on est assuré que le second reste est le diviseur demandé.

4. Il est évident que ce théorème s'applique également à la recherche du plus grand commun diviseur entre des polynômes contenant un nombre quelconque de lettres.

Soient pour exemple les deux polynômes à deux lettres

$$3x^3-7yx^2+3y^2x-2y^3$$
$$2x^2-3yx-2y^2$$
$$4,\ -6+5y$$

$$+12y^2-8y^3$$
$$+12y^2$$
$$-15y^2-10y^3$$

1er reste... $x-2y$... dans lequel on a supprimé le facteur $9y^2$.

$$1-2-y$$

$$0$$

5. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici est relatif aux polynômes des degrés m et $m-1$. Quand l'un des polynômes est du degré m, et l'autre du degré $m-2$, il faut calculer un multiplicateur de plus, en suivant le procédé indiqué plus haut.

Prenons pour exemple les deux polynômes

$$20x^5 - 41yx^4 + 50y^2x^3 - 45y^3x^2 + 25y^4x - 6y^5$$
$$5x^3 - 4yx^2 + 5y^2x - 3y^3.$$

On trouvera les quatre multiplicateurs 1, 4, $5y$, $2y^2$, qui, étant écrits avec des signes convenables pour l'opération, seront $+1$, -4, $+5y$, $-2y^2$.

Mais au lieu de commencer la multiplication par les troisièmes termes, il faudra la commencer par les quatrièmes pour les multiplicateurs $+1$ et -4, et par le troisième et le second terme du diviseur respectivement pour les multiplicateurs $5y$, $-2y^2$.

Voici le détail de l'opération :

$$\begin{array}{l}
20x^5 - 41yx^4 + 50y^2x^3 - 45y^3x^2 + 25y^4x - 6y^5 \\
5x^3 - 4yx^2 + 5y^2x - 3y^3 \\
1,\ -4,\ +5y,\ -2y^2 \\
\hline
-45y^3 + 25y^4 - 6y^5 \\
+12y^3 \\
+25y^3 - 15y^4 \\
+\ \ 8y^3 - 10y^4 + 6y^5 \\
\hline
0
\end{array}$$

On pouvait reconnaître à l'inspection des multiplicateurs que la division se ferait exactement, et par conséquent éviter de faire l'opération.

6. Il nous reste à examiner un dernier cas ; c'est celui où les polynômes sont l'un et l'autre du degré m. Si les coefficients des termes en x^m ne sont pas égaux, on multipliera

l'un d'eux par un facteur convenable, afin qu'ils le deviennent. On retranchera l'un des polynômes de l'autre ; on obtiendra un résultat du degré $m-1$, auquel on appliquera le théorème conjointement avec l'un des polynômes proposés.

Soient donc pour exemple les deux polynômes du quatrième degré

$$\begin{array}{r}
x^4+8x^3+12x^2-8x+3\\
x^4+3x^3-13x^2+7x-2
\end{array}$$

$$\text{Résultat de la soustraction.....}\left\{\begin{array}{r} +5x^3+25x^2-15x+5\\ +\ x^3+\ 5x^2-\ 3x+1\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}
\hline
1,\ -1+2\\
\hline
0
\end{array}$$

7. Quand on applique la méthode que nous venons d'exposer à la recherche du plus grand commun diviseur entre un polynôme $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+$ etc. et sa fonction dérivée, on voit que les trois multiplicateurs sont m^2, $-m$, $-a$. Ainsi on peut les écrire à l'inspection de la quantité proposée.

En examinant la composition des coefficients des termes du reste, on reconnaît qu'ils suivent une loi très-simple qui donne le moyen de les obtenir sans écrire la fonction dérivée.

Prenons, pour fixer les idées, le polynôme du cinquième degré

$$\begin{array}{l}
x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\\
5x^4+4ax^3+3bx^2+2cx+d\\
\quad 25,\ -5,\ -a\\
\hline
\quad 25b+25c+25d+25e\\
-15b-10c-5d\\
-4a^2-3ab-2ac-ad\\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Le reste sera}\left\{\begin{array}{r|r|r|l} 10b & x^3+15c & x^2+20d & x+25e\\ -4a^2 & -3ab & -2ac & -ad\end{array}\right.$$

On voit que chaque coefficient est formé de deux parties. On obtient les premières en multipliant, à partir du troisième terme, les coefficients b, c, etc. respectivement par 2, 3, 4, etc. fois le degré du polynôme ; et les secondes, en multipliant, à partir du deuxième, les coefficients a, b, c, etc., tous par a et par le degré de chaque terme.

Cherchons par cette méthode, encore plus expéditive que la précédente, le reste de la division de

$$x^4+2x^3-3x^3+5x+10 \text{ par sa fonction dérivée,}$$

$$\begin{array}{r} -24+60+160 \\ -12+12-\ \ 10 \\ \hline \end{array}$$

Le reste sera.... $-36x^2+72x+150$

Si l'on a $a=0$, le reste s'obtient encore plus simplement ; car les quantités $4a^2$, $3ab$, etc., contenant toutes le facteur a, se réduisent à zéro : de plus, les autres quantités $10b$, $15c$, etc. renferment le facteur commun 5 ou le degré du polynôme D'où il suit que les coefficients du reste sont $2b$, $3c$, $4d$, $5e$, etc.

Par exemple, le reste de la division de

$$x^7+7x^6-9x^5-13x^4+8x^3-5x^2-2x+20 \left\} \begin{array}{l}\text{par sa fonc-}\\ \text{tion dérivée}\end{array}\right.$$

sera $\quad +14x^6-27x^5-52x^4+40x^3-30x^2-14x+160$

Note. Nous reviendrons sur ce théorème et sur les auteurs qui s'en sont occupés, dans notre article interrompu sur l'Élimination (I, p. 125). Tm.