NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WANTZEL

Note sur les racines complexes des équations et sur les facteurs des polynômes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 325-329

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__325_1>

NOTE

SUR

LES RACINES COMPLEXES DES ÉQUATIONS

et sur les facteurs des polynômes algébriques.

PAR M. WANTZEL,

repetiteur a l'École polytechnique.

---

1. *Toute équation algébrique à coefficients complexes entiers et dont le premier terme est x^m, ne peut avoir une racine complexe fractionnaire.* Cette proposition est énoncée dans un travail inséré à la page 41 de ce recueil; mais la démonstration donnée par l'auteur n'est pas complète. Elle suppose que $(a+b\sqrt{-1})^n$, ne peut être divisible par un nombre premier p lorsque a et b ne le sont pas tous deux;

ce qui est inexact, puisque $(1+\sqrt{-1})^2$ est divisible par 2

La démonstration suivante n'est sujette à aucune restriction.

2. Je dis d'abord que si le nombre premier p est différent de 2, il ne peut diviser $(a+b\sqrt{-1})^n$, sans diviser $a+b\sqrt{-1}$. En effet $a+b\sqrt{-1}$, est une racine de l'équation $x^2-2ax+a^2+b^2=0$, et aussi de l'équation $x^n-2ax^{n-1}+(a^2+b^2)x^{n-2}=0$; le facteur p diviseur de x^n divise le module $(a^2+b^2)^n$, et par suite a^2+b^2; il divisera également le terme $2ax^{n-1}$, puisqu'il est diviseur des termes extrêmes de cette équation. Si p ne divisait pas $a+b\sqrt{-1}$, il ne pourrait diviser $2a$, puisqu'il est diviseur de a^2+b^2. et différent de 2, il faudrait donc qu'il divisât x^{n-1}. En remplaçant n par $n-1$, on démontrerait de même que p doit diviser x^{n-2}... et ainsi de suite jusqu'à x ou $a+b\sqrt{-1}$, ce qui est contre l'hypothese. Donc si $\frac{a+b\sqrt{-1}}{p}$ est fractionnaire, $\frac{(a+b\sqrt{-1})^n}{p}$ l'est pareillement, à moins que p ne soit égal à 2.

3. Lorsque $p=2$, la proposition n'est plus vraie, comme nous l'avons fait remarquer ci-dessus. Toutefois, le facteur 2 ne peut diviser $(a+b\sqrt{-1})^n$ sans diviser $a+b^2$, ou sans que les nombres a et b soient tous deux impairs. Alors a^2+b^2 est de la forme $4n+2$, c'est-à-dire une seule fois divisible par 2 : d'où il résulte que $(a+b\sqrt{-1})^{2n}$, et $(a+b\sqrt{-1})^{2n+1}$, sont tout au plus divisibles par la puissance n de 2, puisque les carrés de leurs modules $(a^2+b^2)^{2n}$ et $(a^2+b^2)^{2n+1}$, n'admettent pas le diviseur 2^{2n+2}. D'ailleurs $(a+b\sqrt{-1})^2$ ou $a^2-b^2+2ab\sqrt{-1}$ est divisible par 2.

donc $(a+b\sqrt{-1})^{2n}$ et $(a+b\sqrt{-1})^{2n+1}$, sont divisibles par 2^n et ne le sont pas par une puissance supérieure. On verrait de même que généralement le produit de $2n$ ou de $2n+1$ facteurs de la forme $a+b\sqrt{-1}$, pour lesquels a et b sont impairs, ne peut admettre pour diviseur que la puissance n du facteur 2.

4. L'équation $x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0$, à coefficients complexes entiers ne peut admettre une racine fractionnaire $\frac{a+b\sqrt{-1}}{p}$. Car si l'on substitue et si l'on multiplie par p^m, il vient

$$(a+b\sqrt{-1})^m+a_1p\,(a+b\sqrt{-1})^{m-1}+\ldots+a_mp^m=0.$$

Quand p n'est pas une puissance de 2, tous les termes sont divisibles par p excepté le premier (2), et l'impossibilité est évidente : il en est de même lorsque $p=2$, ou égal à une puissance de 2, si $m=2n+1$, puisque tous les termes excepté le premier (3), sont alors divisibles par 2^{n+1}. Dans le cas où $m=2n$, le troisième terme et les suivants admettent le diviseur 2^{n+1}, tandis que la somme des deux premiers $(a+b\sqrt{-1})^{2n-1}(a+b\sqrt{-1}+pa_1)$, est un produit de $2n$ facteurs impairs qui n'est divisible que par 2^n (3).

5. La recherche des racines complexes n'est qu'un cas particulier de la décomposition d'un polynôme en facteurs rationnels. En effet, considérons d'abord une équation à coefficients réels : si $a+b\sqrt{-1}$ est une racine complexe, le premier membre est divisible par $x^2-2ax+a^2+b^2$; il suffira donc, pour avoir toutes les racines de cette espèce, de chercher les diviseurs rationnels de la forme x^2+px+q, et d'écarter ceux où $q-\frac{p^2}{4}$, ne serait pas un carré.

Le cas où l'équation proposée $M=0$, a des coefficients complexes le ramène au précédent : pour cela il suffit de changer le signe de $\sqrt{-1}$ dans tous les termes de cette équation et de multiplier l'équation $M'=0$ ainsi obtenue membre à membre par $M=0$. On aura ainsi une équation à coefficients réels dont les racines complexes de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$ appartiendront à l'équation proposée en choisissant un signe convenable pour $b\sqrt{-1}$. Ce choix pourra se faire au moyen du dernier terme de l'équation qui doit être divisible par la racine. Pour ne pas faire de calculs inutiles, on doit débarrasser les premiers membres des équations $M=0$, $M'=0$, de leur commun diviseur, s'ils en admettent, et opérer séparément sur ce commun diviseur.

6. La considération des diviseurs conduit à une autre démonstration de la proposition énoncée ci-dessus. Soit en effet l'équation $x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, qu'on peut supposer à coefficients réels ; d'après ce que nous venons de dire, si elle admettait une racine complexe fractionnaire $\dfrac{a+b\sqrt{-1}}{p}$, le facteur $x^2 - \dfrac{2a}{p}x + \dfrac{a^2+b^2}{p^2}$ aurait au moins un coefficient fractionnaire ; car p ne peut diviser a et a^2+b^2 et s'il est égal à 2, a^2+b^2 n'est pas divisible par 4 ; il suffit donc de démontrer qu'un polynôme à coefficients entiers dont le premier terme est x^m ne peut admettre un diviseur à coefficients fractionnaires (*).

7. Plus généralement pour que le polynôme. . . . . $x^m + \dfrac{a_1}{a}x^{m-1} + \ldots + \dfrac{a_m}{a}$, soit divisible par $x^n + \dfrac{b_1}{b}x^{n-1} + \ldots + \dfrac{b_n}{b}$, il faut nécessairement que b divise a. On suppose naturellement que les coefficients de l'un et l'autre polynôme sont réduits au plus petit dénominateur commun. Cela posé, en multipliant le dividende par a, et par une puissance de b

(*) V. p. 47.

convenable, on pourra toujours obtenir un quotient à coefficients entiers, en sorte que l'on aura :

$$b^p\,(ax^m + a_1x^{m-1} \ldots + a_m) = (bx^n + b_1x^{n-1} + b_n)\,\mathrm{Q}.$$

Or b^p est premier avec le diviseur, donc il doit diviser tous les termes de Q ; par conséquent $ax^m + a_1x^{m-1} + \ldots$, est égal à $bx^n + b_1x^{n-1} + \ldots$, multiplié par un polynôme à coefficients entiers, ce qui exige que a soit un multiple de b.

8. La décomposition d'un polynôme en facteurs rationnels a beaucoup d'autres applications. Par exemple, il est souvent important de savoir reconnaître qu'un polynôme est premier, ou que l'équation dont il est le premier membre est irréductible. Je me propose d'indiquer dans un autre article un procédé régulier et d'une application facile pour trouver les diviseurs rationnels d'un polynôme algébrique.