GUILMIN

Note sur les piles de boulets

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 30-32

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__30_1>

NOTE SUR LES PILES DE BOULETS.

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'école normale.

Pour démontrer les formules qui servent à la sommation des piles de boulets, on emploie ordinairement celles qui sont relatives aux sommes des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, ou bien on a recours à la théorie des combinaisons : la démonstration suivante, qui n'emploie ni les unes ni les autres, m'a semblé plus simple.

Elle est fondée sur cette remarque. Une tranche de pile carrée de n boulets, sur chaque côté, peut être considérée comme l'assemblage de deux tranches de piles triangulaires, l'une de n boulets, l'autre de $n-1$ boulets de côté.

C'est ce que l'on voit facilement en figurant une tranche de pile carrée, et tirant une ligne droite le long des boulets qui forment la diagonale.

D'ailleurs, on le voit facilement par l'identité suivante :

$$n^2 = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Car

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2} \quad \text{et} \quad 1+2+3\ldots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

La première somme est, comme on sait, le nombre des boulets de la première tranche de pile triangulaire indiquée ; la deuxième est relative à la tranche de $n-1$ boulets.

Par suite, en désignant par Q_n le nombre des boulets de toute la pile carrée, et par T_n, T_{n-1} les sommes de boulets de deux piles triangulaires, l'une de n tranches, l'autre de $n-1$, on aura

$$Q_n = T_n + T_{n-1}.$$

Une pile triangulaire de $n-1$ tranches est ainsi composée.

1re	tranche,	1 boulet.
2e	id.	$1+2$.
3e	id.	$1+2+3$.
. . . . . .		. . . . . .
. . . . . .		. . . . . .
$(n-1)^e$	tranche,	$1+2+3+\ldots+n-1$.

Donc $T_{n-1}=1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\ldots(n-1)(n-(n-1))$
$$=n(1+2+3+\ldots+n-1)-(1+2^2+3^2+\ldots(n-1)^2).$$

En changeant $n-1$ en n, ou n en $n+1$, on aura

$$T_n = (n+1)(1+2+3+\ldots+n)-(1+2^2+3^2\ldots n^2)$$
$$= (n+1)(1+2+3+\ldots+n)-Q_n ;$$

d'où $\quad T_n + Q_n = (n+1)(1+2+3+\ldots+n).$

Remplaçant Q_n par la valeur ci-dessus, il vient

$$2T_n + T_{n-1} = (n+1)(1+2+3+\ldots n).$$

Ajoutons des deux parts $1+2+3+\ldots n$, valeur d'une n^e tranche, T_{n-1} deviendra égal à T_n, et on aura $2T_n + T_n$

ou $3T_n = (n+2)(1+2+3+\ldots n) = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{2}$

ou $T_n = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{1\,.\,2\,.\,3}$.

Pile carrée.

$$Q_n = T_n + T_{n-1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

La formule qui donne la somme des boulets d'une pile rectangulaire se déduisant facilement de la précédente, je n'ajouterai rien de plus.