NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. PEYRONNY

Limites du périmètre d'une ellipse, et rectification d'une cycloïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 232-234

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__232_1>

LIMITES DU PÉRIMÈTRE D'UNE ELLIPSE,

ET RECTIFICATION D'UNE CYCLOÏDE.

PAR M. A. PEYRONNY,
Élève interne du collége de Saint-Louis (classe de M. Vincent).

THEORÈME.

Le périmètre d'une ellipse dont les demi-axes principaux sont a et b est toujours compris entre $\pi(a+b)$ et $\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Soient $\mathrm{OA}=a$ (*fig.* 22) et $\mathrm{OB}=b$ les demi-axes principaux de l'ellipse. Considérons deux points P et P′ ayant même abscisse et situés, l'un sur le cercle circonscrit, et l'autre sur l'ellipse; menons ensuite deux tangentes qui viendront couper l'axe OA en un même point C. Si α, α' représentent les angles PCO, P'CO, K et K' l'élément du cercle au point P et celui de l'ellipse au point P', on aura

$$\frac{K}{K'}=\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1+\text{tang}^2\alpha}{1+\text{tang}^2\alpha'}},$$

ou, en posant $\text{tang}^2\alpha=m^2$, et remarquant que $\frac{\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\alpha'}=\frac{a}{b}\cdots$

$$K'=K\sqrt{\frac{a^2+b^2m^2}{a^2(m^2+1)}}.$$

Ainsi, si m, m', m''..... représentent les tangentes de tous les angles compris entre 0° et 90°, n leur nombre et p le périmètre de l'ellipse, dont celui de la branche AB n'est que la quatrième partie, on pourra poser, en vertu de la relation $nK=\frac{\pi}{2}a$

$$\frac{p}{4}=\frac{\pi}{2n}a\left\{\sqrt{\frac{a^2+b^2m^2}{a^2(m^2+1)}}+\sqrt{\frac{a^2+b^2m'^2}{a^2(m'^2+1)}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{a^2+b^2m''^2}{a^2(m''^2+1)}}+\ldots\ldots\text{ etc., en nombre } n\right\}.$$

Comme à une valeur m de la tangente en correspond une autre $\frac{1}{m}$, les deux termes $\sqrt{\frac{a^2+b^2m^2}{a^2(m^2+1)}}$ et $\sqrt{\frac{b^2+a^2m^2}{a^2(m^2+1)}}$ se trouveront dans la suite qui constitue le coefficient de $\frac{\pi}{2}a$, et la relation précédente deviendra alors, après la suppression du facteur a,

$$\frac{p}{4}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}n}\left\{\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2m^2}{m^2+1}}+\sqrt{\frac{b^2+a^2m^2}{m^2+1}}\right)+\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots\text{ etc., en nombre }\frac{n}{2}\right\}.$$

La quantité $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2m^2}{m^2+1}}+\sqrt{\dfrac{b^2+a^2m^2}{m^2+1}}$ ramenée à la forme $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ devient

$$\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2}}.$$

Pour $m=0$, cette fonction atteint son minimum, qui est $(a+b)$, et son maximum $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ répond à l'hypothèse $m=1$.

On aura donc, en remplaçant chaque expression par la valeur minimum $(a+b)$, puis par la valeur maximum $\sqrt{2(a^2+b^2)}$,

$$\frac{p}{4}>\frac{\pi}{4}(a+b) \qquad \text{ou} \qquad p>\pi(a+b),$$

$$\frac{p}{4}<\frac{\pi}{4}\sqrt{2(a^2+b^2)} \qquad \text{ou} \qquad p<\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

(*La suite prochainement.*)

Note. Les deux limites de M. Peyronny, et d'autres plus rapprochées, ont été données la première fois par J. Bernoulli, d'après une génération organique d'une courbe *rampant* sur une autre, moyen simple et d'une extrême fécondité pour les périmètres des courbes, sur lesquels la géométrie ordinaire et celle des projections ne nous apprennent absolument rien ; nous en entretiendrons nos lecteurs. Tm.