NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de MM. Sturm et Cauchy, déduits d'un seul principe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 209-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__209_0>

THÉORÈMES

DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER, DE MM. STURM ET CAUCHY,

déduits d'un seul principe.

(Suite, v. p. 188.)

—

9. *Problème* 3. Étant donnée la fonction entière $\varphi(x)$, trouver une autre fonction entière $\psi(x)$, telle que, pour la fonction fractionnaire $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, D_∞ (5) soit nulle entre les limites quelconques a et b.

Solution. Soit l une racine réelle de $\varphi(x)$, et supposons, pour plus de généralité, que cette racine soit multiple du degré m, de sorte que l'on a $\varphi(x)=(x-l)^m\text{P}$, où P est une fonction entière de (x) ; faisant $x=l+h$, la fonction fractionnaire devient $\frac{\psi(l+h)}{\frac{h^m}{[m]}\varphi^m l+\text{etc.}}$.... $[m]$ est le produit continuel et $\varphi^m(l)$ est la dérivée de l'ordre m ; car, d'après la propriété connue des racines multiples, les fonctions dérivées qui précèdent φ^m sont nulles. Cette fraction peut s'écrire comme produit de deux facteurs, de cette manière $\frac{1}{h}\cdot\frac{\psi(l+h)}{\frac{h^{m-1}}{[m]}\varphi^m\, l+\text{etc.}}$; pour que cette fraction ait toujours le même signe que h, il faut que le second facteur soit toujours positif, c'est-à-dire que le numérateur et le dénominateur soient toujours de même signe ; or, h étant infiniment petit, le signe est déterminé dans chaque suite par le premier terme. On satisfait donc de la manière la plus simple à la condition de rendre le second facteur constamment positif en écrivant que le premier terme du numérateur est égal au premier terme du dénominateur, ce qui revient à écrire $\psi x = \varphi'(x)$; car alors le premier terme du numérateur est $\frac{h^{m-1}}{[m-1]}\varphi^m(l)$, et la fraction prend la forme $\frac{1}{h}\,\frac{m+hM}{1+hN}$, où M et N représentent des fonctions entières de h et de l. Ainsi, pour h infiniment petit et négatif, c'est-à-dire pour $x = l - h$, le rapport $\frac{\varphi'(l-h)}{\varphi(l+h)}$ est négatif ; et dans la même hypothèse et $x = l + h$, ce rapport est positif, et pour $h = 0$ le rapport est infiniment grand ; donc il n'y a point de variation descendante lorsque la fraction passe par l'infini ; ainsi $D_\infty = 0$; donc $\psi(x) = \varphi'(x)$ donne la solution la plus simple du problème.

Observation 1. $\varphi(x)$ ayant des racines multiples, $\frac{\varphi'(l)}{\varphi(l)}$ devient en apparence $\frac{0}{0}$; mais la valeur effective est infinie.

Obs. 2. P étant une fonction entière de x, $\varphi' x + P\varphi(x) = \psi x$ donne aussi une solution, car $\frac{\psi x}{\varphi x} = P + \frac{\varphi' x}{\varphi x}$ et le signe du premier membre est le même que celui de $\frac{\varphi' x}{\varphi x}$ lorsque cette fraction passe par l'infini (lemme 5). En général, soit $f(z)$ une fonction entière de z ne renfermant que des termes positifs et des exposants impairs ; remplaçant z par $\varphi'(x)$, on obtient encore une fonction $\psi(x)$ qui satisfait au problème, vu que cette fonction est toujours de même signe que $\varphi'(x)$.

10. *Théorème* 1. Le nombre des racines réelles distinctes d'un polynôme algébrique entier $F(x)$ comprises entre les deux limites a et b est toujours égal à l'excès E, relatif au rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$.

Démonstration. Supposons m racines distinctes comprises entre a et b ; dans cet intervalle, le rapport $\frac{F'x}{Fx}$ passe donc m fois par l'infini, et pas davantage; et toujours pour des variations ascendantes (problème 3) ; donc $E = m$.

Théorème de M. Sturm.

11. *Problème 4.* Trouver le nombre des racines réelles distinctes de l'équation $F(x) = 0$ comprises entre les deux limites a et b? $a < b$.

Solution. On calcule les restes successifs $-F_2(x)$, $-F_3(x)$ ..... $-F_r(x)$, que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de sa dérivée $F'(x)$; on écrit sur deux lignes les suites

$$F(a),\ F'(a),\ F_2(a),\ F_3(a)\ \ldots\ldots\ F_r(a),$$
$$F(b),\ F'(b),\ F_2(b),\ F_3(b)\ \ldots\ldots\ F_r(b),$$

ou seulement les signes de ces diverses quantités : autant la seconde ligne a de variations de moins que la première, autant il y a de racines réelles comprises entre a et b. Cette solution est une conséquence du théorème précédent et du problème 3.

Observation. E étant égal à m essentiellement positif, la seconde suite ne peut jamais avoir moins de variations que la première.

Théorème de Rolle.

12. *Théorème* 2. Le nombre de racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, comprises entre les limites a et b, ne peut jamais surpasser de plus d'une unité le nombre de racines réelles de l'équation dérivée $F'(x) = 0$, comprises entre les mêmes limites.

Démonstration. Soient E et E' les *excès* relatifs aux fonctions réciproques $\frac{F'(x)}{Fx}$ et $\frac{F(x)}{F'(x)}$, on a $E + E' = \varepsilon$ (5) ; or soit encore m le nombre des racines réelles distinctes de $F(x)=0$, comprises entre a et b, et m' le nombre des racines de $F'(x)=0$ comprises entre les mêmes limites ; donc $E=m=-E'+\varepsilon$ (théorème 1). Si toutes les variations relatives à $\frac{F(x)}{F'(x)}$ étaient ascendantes, ou, ce qui revient au même, si toutes les variations relatives à $-\frac{F(x)}{F'(x)}$ étaient descendantes, dans ce cas on aurait $-E'=m'$. Ainsi m' est donc la plus haute valeur que puisse avoir $-E'$, et $+1$ est la plus haute valeur de ε; donc la valeur la plus élevée de m est $m'+1$, C. Q. F. D.

Théorèmes de Fourier et Budan.

13. *Théorème* 3. Le nombre des racines réelles de l'équation $F(x)=0$, comprises entre les limites a et b, est tout au plus égal à la différence entre le nombre des variations des deux suites

$$F(a),\ F'(a),\ F''(a)\ldots\ldots\ F^n(a) \qquad (1)$$

$$F(b),\ F'(b),\ F''(b)\ldots\ldots\ F^n(b) \qquad (2)$$

dans lesquelles F', F''..... F^n représentent les dérivées successives de $F(x)$ et n le degré de l'équation $F(x)=0$.

Démonstration. Soient m, m', m''..... $m^{(n)}$ le nombre des racines des équations $F(x)=0$, $F'(x)=0$, $F''(x)=0$..... $F^n(x)=0$, comprises entre les limites a et b, et ε, ε', ε''..... $\varepsilon^{(n)}$ les *excès totaux* relatifs aux rapports

$$\frac{F'(x)}{Fx},\ \frac{F''(x)}{F'(x)},\ \frac{F'''(x)}{F''(x)}\ldots\ldots\ \frac{F^n(x)}{F^{n-1}(x)}.$$

L'équation étant du degré n, on a $m^{(n)}=0$, $\varepsilon^{(n)}=0$; le théorème de Rolle donne

$$\begin{aligned} &m<m'+\varepsilon,\\ &m'<m''+\varepsilon',\\ &\vdots\\ &m^{(n-1)}<m^{(n)}+\varepsilon^{(n-1)}; \end{aligned}$$

donc $m < \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \ldots\ldots \varepsilon^{(n-1)}$; mais cette somme est égale au nombre des variations de la seconde suite, moins celle de la première (problème 2) ; donc.. .. C. Q. F. D.

Théorème de Descartes.

14. *Théorème* 4. Le nombre des racines positives de l'équation

$$Fx = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots A_{n-1}x + A_n = 0$$

ne peut surpasser le nombre de variations de signe que présente la suite des coefficients 1, A_1, $A_2\ldots\ldots A_{n-1}$, A_n.

Démonstration. Dans le théorème de Fourier, prenons $a = 0$, $b = \infty$: la suite (1) devient A_n, A_{n-1}, $1.2.3.\,A_{n-2}$; $1.2.3.\,A_{n-3}\ldots\ldots [n-1]A_1$; $[n].1$, et la suite (2), entièrement composée de termes positifs, n'offre aucune variation; donc, d'après le même théorème, le nombre des racines comprises entre 0 et ∞ ne peut dépasser le nombre des variations que présente la suite des coefficients A_n, $A_{n-1}\ldots\ldots$ A_1, $+1$, etc., C. Q. F. D.

Corollaire. Le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ ne peut surpasser que d'une unité le nombre des racines positives de l'équation $F'(x) = 0$, lorsque les deux derniers termes de la fonction $F(x)$ forment une variation de signe.

Observation. Ainsi, de l'équation fondamentale $E + E' = \varepsilon$, on a déduit tous les théorèmes énoncés; il reste encore celui de M. Cauchy. Tm.

(*La suite prochainement.*)