NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD MERLIEUX

Question sur les équations dérivées

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 178-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__178_1>

QUESTION SUR LES ÉQUATIONS DÉRIVÉES (*),

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD),
élève en spéciales (première place).

Quelles sont les conditions nécessaires pour que les équations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées d'un polynôme de la forme

$$x^m + P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} \ldots\ldots + P_n x^{m-n} \ldots\ldots + P_m,$$

depuis la $(m-n)^{\text{ième}}$ jusqu'à la $(m-1)^{\text{e}}$, aient une racine commune?

(*) Proposée au collége Louis-le-Grand. Classe de M. Richard, en février 1844.

Quelle est la forme générale des polynômes fonctions de x du $m^{\text{ième}}$ degré qui jouissent de cette propriété ?

Résoudre l'équation que l'on obtient en égalant à zéro l'un de ces polynômes, m étant égal à une puissance de 2 et n étant égal à $m-1$.

I.

Posons

$$f(x) = x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} \ldots\ldots + P_n x^{m-n} \ldots\ldots + P_m.$$

La dérivée de ce polynôme, de l'ordre $(m-n)$, étant désignée par $f^{(m-n)}(x)$,

$$f^{(m-n)}(x) = m(m-1)\ldots\ldots(n+1)\,x^n + (m-1)(m-2)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots nP_1 x^{n-1} + (m-2)(m-3)\ldots\ldots(n-1)\,P_2 x^{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + (m-n)(m-n-1)\ldots\ldots 2.1.P_n,$$

le terme général de ce développement est

$$(m-p)(m-p-1)\ldots\ldots(n-p+1)\,P_p\,x^{n-p},$$

l'indice p étant plus petit que n.

Si on suppose $n=1$, on aura ainsi la dérivée de l'ordre $m-1$:

$$f^{(m-1)}(x) = m(m-1)\ldots 2.x + (m-1)(m-2)\ldots 1.P.$$

Posons donc les équations

$$f^{(m-n)}(x)=0, f^{(m-n+1)}(x)=0 \ldots f^{(m-2)}(x)=0. f^{(m-1)}(x)=0.$$

Considérés relativement à $f^{(m-n)}(x)$, les premiers membres des équations qui suivent $f^{(m-n)}(x)=0$ sont les $(n-1)$ premières dérivées de $f^{(m-n)}(x)$. Si donc on suppose qu'il existe une racine commune aux n équations précédentes, il résulte de la théorie des racines égales qu'elle sera multiple dans $f^{(m-n)}(x)$, et que son degré de multiplicité sera égal à n ; d'ailleurs cette racine sera facile à obtenir, car $f^{(m-1)}x=0$ étant du premier degré, on en tire immédiatement

$$x = -\frac{P_1}{m}.$$

$f^{(m-n)}(x)$ étant du degré n et contenant le binôme $x+\frac{P_1}{m}$ à la puissance n, sera donc égal à $\left(x+\frac{P_1}{m}\right)^n$, à un facteur numérique près, facteur numérique qui n'est autre que le coefficient de x^n dans $f^{(m-n)}(x)$. Divisant cette fonction par $m(m-1)\ldots(n+1)$, on aura

$$x^n+\frac{n}{m}P_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{m(m-1)}P_2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{m(m-1)(m-2)}P_3x^{n-3}+$$
$$\ldots\ldots=\left(x+\frac{P_1}{m}\right)^n=x^n+n.\frac{P_1}{m}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2x^{n-2}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{P_1}{m}\right)^3x^{n-3}+\ldots\ldots$$

Les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux nombres devant être égaux, on a les identités

$$\frac{n}{m}P_1=n.\frac{P_1}{m},$$
$$\frac{n(n-1)}{m(m-1)}P_2=\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2,$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{m(m-1)(m-2)}P_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{P_1}{m}\right)^3;$$

la première montre que P_1 reste indéterminé; mais des suivantes on tire P_2, P_3,..... P_n en fonctions de P_1 :

$$P_2=\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2,\qquad P_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{P_1}{m}\right)^3,\text{etc.}$$

Telles sont les $(n-1)$ conditions demandées.

II.

Le polynôme proposé est de la forme

$$x^m+m.\frac{P_1}{m}x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2x^{m-2}+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{P_1}{m}\right)^3 x^{m-3}+\ldots..$$

$$\ldots..+\frac{m(m-1)\ldots..(m-n+1)}{1.2.\ .\ .\ .\ .\ n}\left(\frac{P_1}{m}\right)^n x^{m-n}+$$

$$+P_{n+1}x^{m-n-1}+\ldots..+P_{m-1}x+P_m,$$

c'est-à-dire que les $(n+1)$ premiers termes sont égaux aux $(n+1)$ premiers termes du développement de la puissance m de $\left(x+\frac{P_1}{m}\right)$.

III.

Si on suppose $n=m-1$, d'où $m-n=1$, le polynôme égalé à zéro devient

$$x^m+m.\frac{P_1}{m}x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{P_1}{m}\right)^2 x^{m-2}+\ldots..$$

$$\ldots..+m\left(\frac{P_1}{m}\right)^{m-1}x+P_m=0,$$

ou encore

$$\left(x+\frac{P_1}{m}\right)^m+P_m-\left(\frac{P_1}{m}\right)^m=0,$$

équation telle que si on fait disparaître le second terme, elle se réduit à une équation binôme.

La formule qui en donne les racines est

$$x=-\frac{P_1}{m}+\sqrt[m]{\left(\frac{P_1}{m}\right)^m-P_m},$$

le radical devant recevoir toutes les déterminations dont il est susceptible.

Dans le cas particulier où m est une puissance de 2, l'équation se résout par une suite d'extractions de racines carrées.