Nouvelles annales de mathématiques

HUET

Théorèmes statiques sur les polygones et les polyèdres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 167-170

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__167_1>

THÉORÈMES STATIQUES
SUR LES POLYGONES ET LES POLYÈDRES.

PAR M. HUET,
régent au collége de Pamiers.

Si plusieurs forces sont représentées par les côtés d'un polygone plan ou gauche, en grandeur et en direction, et, de plus, si elles agissent dans le même sens, elles se réduisent à un couple.

Je vais d'abord prouver que ce théorème est vrai pour le triangle, et j'en conclurai ensuite qu'il a lieu pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

Soit le triangle ABC (*fig.* 19) ; P, Q, R, les forces agissant dans la direction de ses côtés, dans le même sens, et ayant pour intensité la grandeur des côtés. La force Q appliquée au point C peut être supposée appliquée en B ; alors elle se compose avec la force P appliquée en B, et fournit la résultante BS, et on a $CS = BD = AB$. Les deux triangles ABC, CBS sont égaux comme ayant BC commun, l'angle ABC égale BCS, et $AB = CS$. Donc $BS = AC$, et les angles BCA, CBS sont égaux ; donc la force BS est égale à la force AR et lui est parallèle ; donc les trois forces P, Q, R se réduisent à un couple.

Soit maintenant un polygone d'un nombre quelconque de côtés ABCDEFG (*fig.* 20) ; P, Q, R, S, T, U, V les forces qui agissent dans la direction de ses côtés, dans le même sens, et ayant pour intensités les grandeurs de ces côtés. Menons les diagonales AC, AD, AE, AF, appliquons aux deux extrémités de chacune de ces diagonales, et dans leur direction deux forces égales et opposées, dont l'intensité soit égale en grandeur à ces diagonales, ce qui ne change pas l'état du système. On voit alors que chaque triangle se trouve sollicité comme dans le cas précédent, que partout pour chaque triangle les forces se réduisent à un couple, et par conséquent que toutes les forces appliquées au polygone se réduisent aussi à un couple.

Note. I. Pour opérer la composition des couples par la méthode des *axes*, on prend un point quelconque O dans l'espace, et on abaisse des perpendiculaires, représentant les *axes*, sur les plans des couples, soit P le pied d'une de ces perpendiculaires. Supposons un homme placé sur le plan du couple, ayant les pieds en P et la tête en O; pour représenter le sens du couple, M. Poinsot établit cette convention : si le couple tourne de gauche à droite, on porte la ligne proportionnelle à la grandeur du couple, sur le prolongement de PO, à partir de O, en s'éloignant du plan; et si le couple tourne de droite à gauche, on porte la ligne représentant l'intensité du couple, de O vers P, d'après cette convention, on voit que lorsque deux couples tournent dans le même sens, le couple résultant tourne aussi dans le même sens, et par conséquent, si tant de couples qu'on voudra tournent dans le même sens, l'équilibre est impossible; c'est ce qui a lieu, dans le cas actuel, en prenant un des angles du polygone pour point de départ des axes; on peut même prendre pour origine des axes, un point quelconque, situé dans l'intérieur du polygone, lorsqu'il est plan.

II. Chaque couple est ici proportionnel au double de l'aire d'un triangle correspondant; représentant donc l'intensité du couple par G, on a, d'après la formule relative à la résultante, $G^2 = 4\Sigma A^2 + 8\Sigma AA' \cos A,A'$; A, A', A'' ...., sont les aires des triangles ABC, ACD, ADG, etc. ; ΣA^2 est la somme des carrés des aires des triangles, et $\Sigma AA' \cos (A,A')$ est la somme qu'on obtient, en multipliant ces aires deux à deux et par le cosinus de l'angle respectif et ajoutant les produits.

III. Cette formule exprime aussi ce théorème de géométrie : Dans toutes les pyramides qui ont pour base le même polygone, la somme des aires des carrés des faces triangulaires plus le double de la somme des produits de ces aires prises deux à deux et par le cosinus de l'angle respectif des faces, est une quantité constante ; et lorsque le polygone est plan, cette quantité constante est égale au carré de l'aire de la base.

IV. Pendant le mouvement du système, le centre de moyenne distance des sommets du polygone reste immobile (*voy.* p. 241, t. II). En général, et d'après le même principe, si des mobiles, partant simultanément des sommets d'un polygone, parcourent les côtés, dans le même sens, avec une vitesse uniforme et proportionnelle respectivement à ces côtés, le centre de gravité de ces mobiles reste fixe. Cette proposition était déjà connue des anciens, mais pour le triangle seulement. Voici comment elle est énoncée dans Pappus (liv. 8, prop. 2) : Soit le triangle ABC et le triangle inscrit GHK ; G est entre A et B, H entre B et C ; K entre A et C ; si l'on a $\frac{AG}{BG} = \frac{BH}{CH} = \frac{CK}{AK}$, les deux triangles ont même centre de gravité.

V. Si l'on applique selon les côtés d'un polyèdre deux forces égales et directement opposées, il y a équilibre ; représentons ces forces respectivement par les côtés en grandeur et en direction ; le système se partage en deux autres, dont chacun a pour résultante un couple ; les deux couples résultants sont égaux, ont le même axe et tournent en sens inverse ; les couples composants ne sont autres que les doubles des aires des faces du polyèdre ; si l'on supprime une face, alors les faces restantes donneront pour résultante un couple représenté par le double de l'aire de la face supprimée ; appliquant la formule connue pour les couples résultants, on a ce théorème général (Carnot, *Géom. de position*, p. 310) : Le carré de l'une quelconque des faces d'un polyèdre est égale à la somme des carrés de toutes les autres faces, moins le double de la somme des produits de toutes les autres faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent.

Le théorème (III) est un cas particulier.

VI. Il existe un théorème analogue pour les polygones (*Géométrie de position*, p. 308) ; en général, tout théorème de statique peut se transformer en théorème de géométrie. En décomposant un système de forces dont on connaît l'état résultant, en d'autres groupes de forces, on parvient à beaucoup de théorèmes consignés dans l'ouvrage cité. Tm.