Nouvelles annales de mathématiques

Auguste Deladéréere

Note sur les maxima d'un produit

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 165-167

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__165_1>

NOTE SUR LES MAXIMA D'UN PRODUIT.

PAR M. AUGUSTE DELADÉRÉERE,
professeur, licencié ès sciences physiques et mathématiques.

Décomposer un nombre a en parties telles que le produit de puissances positives déterminées de ces parties soit un maximum.

Soient x, y, z, u .. ces parties, on a $x+y+z+u+\ldots=a$. Or, en appelant m, n, p, q, les exposants des puissances, il faut que $x^m y^n z^p u^q \ldots$ soit un maximum. Et il est évident qu'on y satisfera en rendant $\frac{x^m y^n z^p u^q \ldots}{m^m n^n p^p q^q}$ un maximum; car le dénominateur est constant.

Mais on a $\frac{x^m y^n z^p u^q \ldots}{m^m n^n p^p q^q \ldots} = \frac{x}{m}\frac{x}{m}\frac{x}{m}\ldots\frac{y}{n}\frac{y}{n}\ldots\frac{z}{p}\frac{z}{p}\ldots\frac{u}{q}\frac{u}{q}\ldots$ et il est aussi évident que $\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\ldots+\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\ldots+\frac{z}{p}+\frac{z}{p}+\ldots+\frac{u}{q}+\frac{u}{q}+\ldots=\frac{mx}{m}+\frac{ny}{n}+\frac{pz}{p}+\frac{qu}{q}+\ldots=x+y+z+u+\ldots=a$. C'est donc comme si on proposait de décomposer a en $m+n+p+q+\ldots$ facteurs $\frac{x}{m}.\frac{x}{m}\ldots\frac{y}{n}.\frac{y}{n}\ldots\frac{z}{p}.\frac{z}{p}\ldots\frac{u}{q}.\frac{u}{q}\ldots$, dont le produit soit maximum, et l'on sait qu'il faut, pour cela, que tous les facteurs soient égaux ; on a donc $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{u}{q}\ldots$ pour les équations qui, conjointement avec $x+y+z+u\ldots=a$, serviront à trouver les valeurs de $x, y, z, u\ldots$ qui rendent le produit maximum ; il y a autant d'équations que d'inconnues, et l'on a

$$x=\frac{am}{m+n+p+\ldots}$$
$$y=\frac{an}{m+n+p+\ldots}$$
$$z=\text{etc.}$$

On voit en même temps que, par le même procédé, on rendrait $x^{-m}y^{-n}z^{-p}u^{-q}\ldots=\frac{1}{x^m y^n z^p u^q\ldots}$ minimum.

Il en serait de même pour

$$x^{\frac{m}{m'}}y^{\frac{n}{n'}}z^{\frac{p}{p'}}u^{\frac{q}{q'}}=\sqrt[m']{x^m}\sqrt[n']{y^n}\sqrt[p']{z^p}\sqrt[q']{u^q}\,;$$

car élevant à la $m'n'p'q'\ldots$ième puissance, on aura $x^{mn'p'q'}y^{nm'p'q'}z^{pm'n'q'}u^{qm'n'p'}$; et si ce produit est maximum, il en sera de même de l'autre. Donc il suffit de poser $\frac{x}{mn'p'q'}=\frac{y}{nm'p'q'}=\frac{z}{pm'n'q'}=\frac{u}{qm'n'p'}=\ldots$, ou divisant par $m'n'p'q'\ldots\frac{x}{\left(\frac{m}{m'}\right)}=\frac{y}{\frac{n}{n'}}=\frac{z}{\frac{p}{p'}}=\frac{u}{\frac{q}{q'}}\ldots$

Enfin, on rendra par le même procédé,

$x^{-\frac{m}{m'}} y^{-\frac{n}{p'}} z^{-\frac{p}{p'}} u^{-\frac{q}{q'}} \ldots$ un minimum.

Cette question est ainsi démontrée par l'algèbre élémentaire. (*Voir* t. II, p. 417).