

AUGUSTE DELADÉRÉE

Note sur les maxima d'un produit

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 165-167

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__165_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES MAXIMA D'UN PRODUIT.

PAR M. AUGUSTE DELADÉRIÈRE,

professeur, licence ès sciences physiques et mathématiques.

Décomposer un nombre a en parties telles que le produit de puissances positives déterminées de ces parties soit un maximum.

Soient $x, y, z, u \dots$ ces parties, on a $x+y+z+u+\dots = a$. Or, en appelant m, n, p, q , les exposants des puissances, il faut que $x^m y^n z^p u^q \dots$ soit un maximum. Et il est évident qu'on y satisfera en rendant $\frac{x^m y^n z^p u^q \dots}{m^m n^n p^p q^q}$ un maximum ; car le dénominateur est constant.

Mais on a $\frac{x^m y^n z^p u^q \dots}{m^m n^n p^p q^q \dots} = \frac{x}{m} \frac{x}{m} \frac{x}{m} \dots \frac{y}{n} \frac{y}{n} \dots \frac{z}{p} \frac{z}{p} \dots \frac{u}{q} \frac{u}{q} \dots$
 et il est aussi évident que $\frac{x}{m} + \frac{x}{m} + \frac{x}{m} + \dots + \frac{y}{n} + \frac{y}{n} + \dots$
 $+ \frac{z}{p} + \frac{z}{p} + \dots + \frac{u}{q} + \frac{u}{q} + \dots = \frac{mx}{m} + \frac{ny}{n} + \frac{pz}{p} + \frac{qu}{q} + \dots$
 $\dots = x + y + z + u + \dots = a$. C'est donc comme si on proposait de décomposer a en $m + n + p + q + \dots$ facteurs $\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \dots \frac{y}{n} \cdot \frac{y}{n} \dots \frac{z}{p} \cdot \frac{z}{p} \dots \frac{u}{q} \cdot \frac{u}{q} \dots$, dont le produit soit maximum, et l'on sait qu'il faut, pour cela, que tous les facteurs soient égaux; on a donc $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{u}{q} \dots$ pour les équations qui, conjointement avec $x + y + z + u + \dots = a$, serviront à trouver les valeurs de $x, y, z, u \dots$ qui rendent le produit maximum; il y a autant d'équations que d'inconnues, et l'on a

$$x = \frac{am}{m + n + p + \dots}$$

$$y = \frac{an}{m + n + p + \dots}$$

$$z = \text{etc.}$$

On voit en même temps que, par le même procédé, on rendrait $x^{-m} y^{-n} z^{-p} u^{-q} \dots = \frac{1}{x^m y^n z^p u^q \dots}$ minimum.

Il en serait de même pour

$$x^{\frac{m}{m'}} y^{\frac{n}{n'}} z^{\frac{p}{p'}} u^{\frac{q}{q'}} = \sqrt[m']{x} \sqrt[n']{y} \sqrt[p']{z} \sqrt[q']{u};$$

car élevant à la $m' n' p' q' \dots$ ième puissance, on aura

$x^{mn'p'q'} y^{nm'p'q'} z^{pm'n'q'} u^{qm'n'p'}$; et si ce produit est maximum, il en sera de même de l'autre. Donc il suffit de poser

$$\frac{x}{mn'p'q'} = \frac{y}{nm'p'q'} = \frac{z}{pm'n'q'} = \frac{u}{qm'n'p'} = \dots, \text{ ou divisant}$$

$$\text{par } m' n' p' q' \dots \frac{x}{\binom{m}{m'}} = \frac{y}{\binom{n}{n'}} = \frac{z}{\binom{p}{p'}} = \frac{u}{\binom{q}{q'}} \dots$$

Enfin, on rendra par le même procédé,

$\frac{m}{x} \frac{n}{y} \frac{p}{z} \frac{q}{u} \dots$ un minimum.

Cette question est ainsi démontrée par l'algèbre élémentaire. (Voir t. II, p. 417).