NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FINCK

Note sur une nouvelle méthode de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 147-154
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__147_0>

NOTE

SUR UNE

NOUVELLE MÉTHODE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PAR M. FINCK,
Docteur ès sciences, professeur à l'école d'artillerie et au college de Strasbourg.

Notre Descartes, en créant sa géométrie, n'a pas entendu poser des bornes à la science : cependant, dans tous nos traités *absolument neufs*, je ne vois que sa méthode. Quelquefois, il est vrai, on se plaint qu'elle n'est pas parfaite; qu'au delà du second degré, elle a bien peu de portée, etc. N'y a-t-il donc pas de progrès ? Si fait, mais pas dans les livres élémentaires. La méthode de Descartes (sur le plan) consiste à rapporter les modes de l'étendue à des droites qui souvent n'ont pas une liaison bien intime avec la courbe que l'on étudie. Mais déjà le grand Euler, qui n'a touché à rien en vain, a fait un pas de plus : il est vrai que ce n'est qu'un germe. Ce germe est actuellement développé ; j'ai fait connaître un de ses fruits dans le journal de M. Liouville, il y a quelques années. Le développement en question est le *nouveau système de géométrie analytique* du docteur Plucker, Bonn, 1835.

Ce système, outre ses généralités par rapport à la transformation des figures, consiste à chercher dans l'équation de la courbe les droites qui ont avec la courbe, la liaison la plus intime. J'ai fait, comme vous savez, une application de cette méthode à l'espace, en donnant des moyens précis et simples pour reconnaître dans chaque cas la nature du lieu représenté par une équation à trois variables. Je donne toujours, dans mon cours, une idée de ladite méthode. Je ne me propose pas de la développer maintenant ; il suffit de montrer, par quelques exemples tirés du *nouveau système*, avec quelle facilité elle s'applique à un certain genre de recherches où, au contraire, l'ancien système est très-prolixe.

1° Je nomme p, q, r, s, a, b, des fonctions linéaires de la forme $Ay + Bx + C$. Toute courbe du second degré pourra être représentée d'une infinité de manieres par une équation telle que

$$pq + a^2 = 0, \qquad (1)\ (*)$$

où $p = 0$, $q = 0$ seront évidemment deux tangentes, $a = 0$ est la corde de contact.

Je représente la même courbe par

$$rs + b^2 = 0, \qquad (2)$$

et, vu le nombre des coefficients A, B, etc., je puis supposer

$$pq + a^2 = rs + b^2; \qquad (3)$$

d'où

$$pq - rs = (b + a)(b - a). \qquad (4)$$

Les quatre droites $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $s = 0$ forment un quadrilatère circonscrit à notre courbe.

L'équation (4) est satisfaite par $p = 0$, $r = 0$, $b + a = 0$; elle l'est aussi par $q = 0$, $s = 0$, $b + a = 0$.

Ainsi, $b + a = 0$ est une des diagonales du quadrilatère circonscrit ; l'autre est évidemment $b - a = 0$.

Or ces deux diagonales se coupent sur les droites $b = 0$, $a = 0$, qui sont les cordes de contact, ou bien les diagonales du quadrilatère inscrit, conjugué.

De là, le théorème déjà connu de Newton.

Du reste, les équations $a = 0$, $b = 0$, $b + a = 0$, $b - a = 0$ sont évidemment celles de quatre rayons harmoniques.

(*) Cette proposition ne peut être admise sans une démonstration qui présente une discussion difficile. Pour une courbe du 3me degré pourrait-on écrire à priori $pqr + a^3 = 0$? Tm.

2° Je représente l'équation de la courbe par

$$pq = rs\,; \qquad (5)$$

p, q, r, s étant toujours des fonctions de la forme indiquée. Les droites $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$ sont ici des sécantes.

L'équation (5) est satisfaite par

$$p = r \quad \text{avec} \quad q = s.$$

Ces deux droites se coupent donc sur la courbe; il en est de même des droites

$$p = s, \quad q = r.$$

D'ailleurs, $p = r$ et $p = s$ se coupent sur $p = 0$;

$q = s$, $q = r$ . . . . $q = 0$.

Voilà six droites

$$p=0,\ p-r=0,\ q-s=0,\ q=0,\ q-r=0,\ p-s=0,$$

dont chacune coupe la suivante sur la courbe; de même la dernière, $p-s$, coupe la première, $p=0$, sur la courbe. Ce sont donc les six côtés consécutifs d'un hexagone inscrit. Or les côtés opposés forment les trois couples suivants :

$\left.\begin{matrix} p=0 \\ q=0 \end{matrix}\right\}$ qui se coupent sur $p-q=0$;

$\left.\begin{matrix} p-r=0 \\ q-r=0 \end{matrix}\right\}$ *id.* vu que $(p-r)-(q-r)=p-q$,

$\left.\begin{matrix} q-s=0 \\ p-s=0 \end{matrix}\right\}$ *id.*

Donc, les intersections des côtes opposés sont en ligne droite. C'est le théorème connu.

Voilà donc l'analyse, à peu près sans calcul : elle n'en est pas plus mauvaise (*).

D'autres travaux remarquables, en ce genre, sont dus à MM. Magnus, Mœbius, Druckenmüller, etc. : j'extrais

(*) En admettant ce genre d'équations à priori sans démonstration, il me semble qu'on esquive les calculs : on ne les évite pas. Les résultats sont connus d'avance et on s'arrange de manière à les obtenir. Tm.

d'un ouvrage de ce dernier (*Die Uebertragungs Principien*, etc.) l'article suivant, remarquable sous plus d'un rapport.

Soient les deux équations

$$y - y' + m\,(x - x') = 0\,, \qquad (1)$$

$$y - y' + m'(x - x') = 0. \qquad (2)$$

Je prends deux solutions de l'équation (1) :

$$x = a\,, \quad y = y' - m\,(a - x')\,; \qquad (3)$$

$$x = b\,, \quad y = y' - m\,(b - x'). \qquad (4)$$

Je prends pareillement deux solutions de (2) :

$$x = a'\,, \quad y = y' - m'(a' - x')\,; \qquad (5)$$

$$x = b'\,, \quad y = y' - m'(b' - x'). \qquad (6)$$

Je forme l'équation du premier degré entre x, y, qui est satisfaite par (3) et (5) : elle est

$$y - y' + m(a - x') = \frac{m(a - x') - m'(a' - x')}{a' - a}(x - a). \qquad (7)$$

Celle qui l'est par (4) et (6), est

$$y - y' + m\,(b - x') = \frac{m(b - x') - m'(b' - x')}{b' - b}\,(x - b). \qquad (8)$$

Or, si l'on élimine y entre (7) et (8), y', m et m' disparaissent, et x est une fonction de x', a, a', b, b', que je nomme $x = f(x', a, a', b, b')$.

Ce résultat peut être interprété géométriquement de bien des manières : en voici quelques-unes.

I. Je suppose que y, x soient des coordonnées ordinaires, (1) et (2) seront deux droites qui se coupent au point (x', y') ; (7) sera une droite qui coupe (1) au point $(x = a, y \ldots.)$ et (2) au point $(x = a', \ldots)$. De même, (8) est une droite coupant (1) au point $(x = b, \ldots)$, (2) au point $(x = b', \ldots)$. Voilà donc un quadrilatère complet dont les côtés sont les droites (1), (2), (7), (8), et dont les six sommets ont pour abscisses respectives

$$x',\ a,\ a',\ b,\ b',\quad x = f(x',\ a,\ a',\ b,\ b')$$

Or, si les cinq premières abscisses restent constantes, la sixième ne variera pas non plus ; donc

Si parmi les six sommets d'un quadrilatère complet, il y en a cinq qui décrivent des droites parallèles à une direction donnée, le sixième décrira aussi une parallèle à cette direction (*axe des* y).

Il est évident qu'il en est de même des intersections des trois diagonales.

II. Toute droite intercepte sur les axes deux segments qui déterminent complétement cette droite. M. Plucker, qui a imaginé ce nouveau système de *coordonnées*, lui a déjà donné un assez haut degré de développement. En représentant par $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ ces segments, il appelle y, x des *coordonnées linéaires*. Une droite est, dans ce système, représentée par deux équations $x = \alpha$, $y = \beta$. Une équation $\varphi(x, y) = 0$ représente ainsi une infinité de droites : on peut donc la regarder comme représentant la courbe à laquelle toutes ces droites sont tangentes. Par conséquent une même équation $\varphi(x, y) = 0$, interprétée d'après les méthodes Descartes et Plucker, représente deux courbes qui ont une certaine relation de *réciprocité* dans le sens connu. Je ne m'étends pas maintenant là-dessus.

Il est très-facile de prouver que dans le système actuel l'équation $y = ax + b$ représente un *point* (*).

Il s'ensuit que l'équation (1) représente un point, et comme elle est satisfaite par $y = y'$, $x = x'$, ce point est sur la droite que déterminent ces deux dernières équations.

Nous avons donc un nouveau quadrilatère dont quatre sommets sont les points (1), (2), (7), (8).

(*) Soit l'équation ordinaire d'une droite $\beta y + \alpha x = 1$. Si $\alpha = a\beta + b$, l'enveloppe de la droite est un point (voyez p. 155). Tm.

Parmi les côtés et diagonales, au nombre de sept, sont les droites

(x', y')	qui passe aux points	(1), (2)
(3)	. . . .	(1), (7)
(4)	. . . .	(1), (8)
(5)	. . . .	(2), (7)
(6)	. . . .	(2), (8)

et la droite qui joint les points (7) et (8), que je nomme (9).

Chacun pourra faire cette figure : la septième droite du quadrilatère est celle qui joint l'intersection des droites (4) et (5) à celle de (9) avec (x',y').

La droite (9) est déterminée par le système des équations (7) et (8) ; c'est a elle qu appartient $x = f(x', a, a', b, b')$.

On admettra que x', a, a', b, b' sont invariables ; c'est supposer que les droites (x',y'), (3), (4), (5), (6) tournent autour de leurs pieds sur l'un des axes ; mais alors $x = f(x', a, a', b, b')$ est invariable ; donc

Si parmi les sept droites qui composent un quadrilatère complet il y en a cinq qui tournent respectivement autour des points où elles sont coupées par une droite quelconque, il y en a une sixième (par suite aussi la septième) qui tourne autour du point où elle est coupée par la même droite.

III. Mais ce ne sont pas les seules interprétations géométriques que l'on puisse donner au fait analytique ci-dessus remarqué, relativement à $x = f(x', a, a', b, b')$. On peut affirmer que le nombre des interprétations est infini : on en obtient, par exemple, *deux* en regardant y, x comme des coordonnées polaires ; alors, au lieu de droites, ce sont des spirales d Archimède qui sont en jeu, et le théorème est relatif ou aux angles ou aux rayons vecteurs.

L'auteur auquel j'emprunte ce qui précède n'a pas donné ces dernières interprétations ; il en a donné une qui se rapporte à des cercles, la voici. Considérons une droite indefinie nommée axe des x; d'un point de cette droite, comme centre, avec un rayon donné, je décris un cercle; prenant pour origine un point quelconque de notre axe des x, je désigne l'abscisse du centre par x et le rayon par y; j'appelle x, y, *coordonnées circulaires*.

Étant donnée une équation $f(x,y)=0$, j'en tirerai une infinité de cercles, et j'appelle lieu de l'équation *la courbe enveloppe de tous ces cercles* : l'équation du premier degré $y=ax+b$ représente dans ce cas encore évidemment une droite.

Par conséquent notre équation (1) représente une droite tangente au cercle (x', y').

De même (2).

Nous avons les cercles (3), (4), (5), (6);

La droite (7) tangente aux cercles (3), (5);

La droite (8) tangente à. . . (4), (6).

Le système des équations (7), (8) convient au cercle qui touche les droites (7), (8), et qui a pour abscisse du centre $x=f(x', a, a', b, b')$.

Ainsi encore un quadrilatère dont les côtés sont (1), (2), (7), (8), et six cercles qui les touchent deux à deux; donc

Si on fait varier le quadrilatère de façon que les centres determinés par x', a, a', b, b', *ne changent pas, quelles que soient les variations des rayons, le centre du sixième cercle* x = f(...) *ne changera pas.*

Mais rien n'empêche de regarder les y comme les abscisses des centres et les x comme les rayons; donc les cinq rayons x', a, a', b, b', restant invariables, le sixième $x=f(\ldots)$ le restera aussi, et *si les angles d'un quadrilatère complet s'appuient sur six cercles dont les centres sont en ligne droite, que l'on déforme le quadrilatère en faisant mouvoir les centres sur la droite qui les contient, de façon que cinq des angles restent appuyés sur leurs cercles, le sixième ne quittera pas le sien.*

Rien n'empêche de supposer que l'axe des x est une courbe au lieu d'une droite, alors il y a modification.

J'ajouterai à ce que je viens de traduire de mon auteur, que l'on peut représenter par x, y deux éléments d'une courbe quelconque dont tous les autres éléments resteraient invariables, et alors le petit calcul ci-dessus conduit à une proposition qui a une infinité de corollaires.

Terminons. Le but de la géométrie analytique est l'étude des lois de l'étendue figurée, par l'intermédiaire des relations métriques. Le moyen est d'attribuer aux symboles analytiques une signification géométrique ; par suite, à chaque signification géométrique nouvelle que vous attribuez aux symboles qui entrent dans un calcul, répond un nouveau théorème de géométrie, et tous ces théorèmes ont un air de famille qui tient à leur origine commune.

Voilà la *dualité* bien dépassée.

Il me semble que ces idées pourraient (dirai-je *devraient*) trouver place dans les traités élémentaires. La composition d'un ouvrage où tout cela entrerait avec des bornes convenables, est très-désirable. J'en ai le projet, toujours plus facile que l'exécution. *Non omnia possumus omnes.*