NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 138-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__138_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments d'arithmétique et d'algèbre à l'usage des écoles royales de navigation. Par C. Fournier, officier de la Légion d'honneur, examinateur de la marine; tome I, de 360 pages; tome II, de 396 pages in-8. Nantes, 1842.

Dans la célébration des mystères d'Eleusis, on entendait par intervalle la voix de l'Hiérophante qui s'écriait : σκοτὶσον, σκοτὶσον ; obscurcissez, obscurcissez. Nous vivons à une époque où beaucoup d'écrivains aspirent à jouer le rôle d'Hiérophante dans les lettres, la philosophie, et dans les sciences. Il semblerait que les mathématiques où la clarté est le mérite essentiel, dominant, devraient être à l'abri de cette invasion ténébreuse; car les sciences exactes ne reposent que sur des notions *évidentes* ; dans cette qualification on trouve la racine *videre*, voir ; une proposition est évidente quand on la *voit* clairement. Toutefois, les mathématiques aussi sont entamées par le fléau égyptien. Il y a certains auteurs qui vous prennent une notion simple, admise par tout le genre humain, et sur laquelle vous obtiendriez même réponse, d'un Chinois, d'un Canadien, d'un Patagon; vous prennent cette notion et raisonnent, raisonnent, raisonnent tant et tant qu'à la fin vous n'y entendez plus rien : une démonstration est-elle facile à comprendre, à retenir, bien vite ils la remplacent par une autre, compliquée, hérissée de difficultes, apprise péniblement aujourd'hui pour être oubliée demain. Voltaire dit qu'un métaphysicien est content quand il est parvenu à donner un violent mal de tête à son lecteur. Les auteurs dont nous parlons, convoitent ce même genre de contentement, aussi il faut quelquefois une forte contention d'esprit, pour suivre telle exposition du calcul différentiel; quel est le résultat? Auparavant vous saviez que le coefficient différentiel de x^2 est $2x$; et maintenant vous savez que $2x$ est le coefficient différentiel de x^2; de sorte qu'après mille peines, votre instruction ne s'est pas agrandie de la valeur d'un centime; ce désappointement se rencontre non-seulement dans les théories élevées, mais encore dans la partie élémentaire, destinée aux jeunes gens qu'il faut attirer vers la science et qu'on dirait vouloir en dégoûter par une rigueur fallacieuse, rebutante. On leur fait démontrer qu'une droite finie n'a qu'un milieu; qu'on ne peut sortir d'une enceinte fermée de toute part, qu'en perçant l'enceinte; et encore d'autres vérités de même acabit. En continuant ainsi, nous mettrons tant d'esprit dans l'enseignement, qu'il n'y aura plus de place pour le bon sens. Je regarde donc comme une bonne fortune de rencontrer des livres où les défauts que nous venons de signaler, sont soigneusement évités, et où brillent des qualités opposées : tel est celui dont nous allons présenter une analyse succincte. Le titre de l'ouvrage est déjà un progrès; il annonce que l'auteur adopte l'idée newtonienne, que l'arithmétique et l'algèbre ne forment qu'une seule science, et que la première quoique devant précéder, est pourtant comprise comme cas particulier dans la seconde. On ne saurait donc trop tôt aborder l'arithmétique universelle, et M. Fournier dit avec raison dans sa préface : «convaincu que les jeunes gens destinés à de *fortes études* ne sauraient trop tôt se familiariser avec les pratiques de l'algèbre, j'ai placé les quatre opérations fondamentales sur les quantités algébriques à la suite des mêmes opérations sur les nombres abstraits. » En effet, les jeunes gens destinés aux fortes études, doivent nécessairement apprendre l'algèbre; dès lors, pourquoi ne pas se servir avec eux de cet admirable instrument pour faciliter l'arithmétique? L'avantage de cet instrument consiste à représenter des phrases très-longues, par un petit nombre de signes et à renfermer une foule de cas particuliers, en une seule expression générale. Pourquoi donc conserver cette phraséologie et ces discussions enchevêtrées qui ne produisent qu'un embonpoint stérile, une perte de temps. On répond que les opérations symboliques par leur extrême facilité, tendent à énerver l'esprit; tandis que la forme dialectique le renforce, l'accoutume aux déductions abstraites. Mais il règne ici une étrange confusion dans les termes; la force de l'esprit a pour but, d'arriver à la vérité par le chemin le plus court; prendre le plus long, pour rester plus longtemps en chemin, c'est fausser l'esprit; ce n'est pas de la vigueur que vous obtenez, mais de la fatigue. Certes, toutes nos facultés physiques, intellectuelles, morales même, pour acquérir de l'intensité, ont besoin d'une certaine gymnastique, mais d'une gymnastique rationnelle; ainsi, pour les mathématiques, elle est, je le répète, dans les propositions intrinsèquement difficiles; telles sont les propriétés des nombres qui composent l'arithmologie; mais vouloir fonder une gymnastique en rendant difficiles, longues, des propositions faciles et courtes, me paraît une dépravation pédagogique.

M. Fournier rend donc service, en exposant d'une manière claire les notions primitives, et en procédant toujours par la voie la plus simple, la plus directe, la mieux adaptée à l'état actuel de nos connaissances. L'ouvrage est divisé en deux parties et subdivisé en quatorze livres; la première, du genre mixte, est principalement consacrée aux nombres chiffrés; c'est l'arithmétique, elle contient les livres de I à VII; la deuxième partie, aussi du genre mixte, est principalement consacrée aux équations et aux nombres représentés par des lettres; c'est l'algèbre en sept livres de VIII à XIV.

Dans le premier livre, on indique les définitions préliminaires, la numération des nombres entiers, fractionnaires ordinaires et décimaux, et la numération romaine; le tout en quinze pages; certains auteurs consacrent à ces objets quarante pages, sans être aussi complets, ni plus satisfaisants.

Le deuxième livre en huit pages, donne les quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers, leurs usages et les théorèmes sur les produits et les quotients. — La division est développée d'une manière rigoureuse et facile; on y lit la remarque suivante (p. 67.) très-utile et qui me paraît neuve: « Quand on trouve un reste égal au chiffre qu'on vérifie, ou plus grand, il est inutile d'aller plus loin, ce chiffre n'est pas trop fort. » Dans le livre précédent, on fait déjà usage, et avec raison, de tous les signes algébriques. Le troisième livre de quarante-six pages, donne les notions préliminaires sur les signes, sur la théorie des quantités positives et négatives, et les quatre opérations algébriques, sur les monômes et les polynômes (1); la notation des exposants positifs, négatifs; la théorie des puissances et des racines. Il y a des considérations sur les fonctions qui sont peut-être prématurées.

(1) L'Académie écrit polynôme avec l'accent circonflexe, et polygone sans accent. L'étymologie prescrit le contraire.

Le livre IV (46 pages) traite des diviseurs, du plus grand commun diviseur et de la divisibilité des nombres. Les propriétés convenables au sujet sont indiquées et rigoureusement démontrées ; il manque, ainsi que dans tous les traités élémentaires, les procédés souvent utiles pour trouver combien un nombre est précédé de nombres premiers à son égard, l'unité comprise ; observation essentielle. L'expression *le plus grand commun diviseur*, si longue, si incommode, est d'un usage très-fréquent, ne pourrait-on pas la remplacer par un seul mot? la *division* a reçu son nom d'une des applications principales de cette opération ; la dénomination convenable au plus grand commun diviseur, doit être déduite de son usage le plus important, le plus fréquent ; cet usage consiste dans la plus grande simplification entre les rapports de quantités chiffrées ou littérales ; le *simplificateur* semble assez bien désigner le nombre ou le polynôme qui sert à simplifier, le plus possible, un rapport donné.

Le livre V (73 pages), les opérations sur les fractions ordinaires et décimales, transformation d'une fraction en une série procédant suivant les puissances négatives d'un nombre donné ; théorie des fractions périodiques.

Il semble que dans ce même livre, on devrait enseigner les théorèmes de Fermat et de Wilson.

Le livre VI (56 pages), contient la théorie du plus grand commun diviseur algébrique ; opération sur les fractions algébriques ; fractions continues ; théorie complète et satisfaisante des réduites. Il serait convenable de mentionner les fractions continues, périodiques pures et mixtes, et de démontrer leur incommensurabilité. Nous signalons aussi une autre lacune, celle des fractions complémentaires, dues à Hughens et si bien développée par Lagrange. Cette lacune existe dans tous les traités élémentaires. Les théories des inégalités et des combinaisons, qui terminent ce livre, ne me semblent pas à leur véritable place, n'ayant nul rapport à ce qui précède ; du reste, les combinaisons et permutations sont exposées d'une manière succincte et suffisante. Il serait à désirer qu'on démontrât ici, par des considérations arithmologiques, que les coefficients combinatoires sont entiers.

Le livre VII (en 55 pages) termine le premier volume, et contient tout ce qu'il est nécessaire de savoir sur les racines carrées et cubiques des nombres, et les diverses méthodes d'approximation.

Le premier tome renferme 374 paragraphes ; de sorte que le tome II commence par le paragraphe 375 et par le VIII^e livre. Il donne le calcul des exposants, entiers, négatifs, fractionnaires, et aussi le calcul à faire sur des radicaux réels ; ensuite on passe au développement binomial, dont on établit la loi, d'abord par voie d'induction, confirmée ensuite par le raisonnement didactique. Telle est même, généralement, la marche de l'auteur : c'est la méthode d'invention, conseillée et suivie par Clairault. Dans les remarques sur ce développement, l'auteur fait ressortir et explique les anomalies que présente la supposition de l'exposant égalé à zero ; vient après la démonstration si lumineuse, si ingénieuse d'Euler, pour le cas de l'exposant fractionnaire ou négatif. Je suis surpris que les auteurs négligent généralement la belle et simple déduction, due au même géomètre, du théorème de Fermat : cette déduction peut s'établir ainsi : a et b étant des nombres entiers quelconques, et p un nombre premier, on a la congruence $(a+b)^p - a^p - b^p = \dot{p}$ (1) ; $\dot{p}$ désigne un multiple de p ; car, dans le développement de $(a+b)^p$, tous les termes, les extrêmes exceptés, admettent p comme facteur et sont entiers ; donc chacun de ces termes, et par conséquent leur somme, est divisible par p. Faisant $a = b = 1$, l'équation (1) devient $2^p - 2 = \dot{p}$ (2) ; donc aussi, $2^{p-1} - 1 = \dot{p}$; faisant $a = 2$, $b = 1$, on a $3^p - 2^p - 1 = \dot{p}$ (3) ; ajoutant les congruences (2) et (3), il vient $3^p - 3 = \dot{p}$ (4) ; d'où $3^{p-1} - 1 = \dot{p}$; faisant $a = 3$, $b = 1$, etc.

La démonstration devient intuitive en partant du polynôme. En effet, l'on a

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n)^p - a_1^{\,p} - a_2^{\,p} - \ldots\ldots a_n^{\,p} = \dot{p}. \qquad (2)$$

Faisant $a_1 = a_2 = a_3 \ldots\ldots = 1$, il vient $n^p - n = \dot{p}$, et si n est premier à p, on a $n^{p-1} - 1 = \dot{p}$; ce qui est le théorème de Fermat. Mais je ne sais comment on peut, par le même moyen, établir la congruence générale $n^k - 1 = \dot{p}$, où p désigne un nombre entier quelconque, et k combien il y a de nombres inférieurs à p et premiers à p. La congruence (2) donne ce théorème : Lorsque la somme de plusieurs nombres entiers est un multiple d'un nombre premier, la somme de ces nombres, élevés chacun à la puissance marquée par ce nombre premier, est divisible par le nombre premier.

Le livre est terminé par l'extraction des racines des polynômes.

Le livre suivant, le IXe, contient l'explication du système métrique ancien et nouveau; les quatre opérations sur les nombres complexes, et la théorie de divers systèmes de numération.

Dans le journal de Crell, on lit une dissertation sur le système de numération, qui jouit de la propriété d'exprimer les plus grands nombres avec le moins de mots possible; la base de ce système est une quantité transcendante. En admettant les compléments à la base, on peut, dans un système quelconque, réduire le nombre des chiffres à moitié : on écrit 4 pour 6, 3 pour 7, et les opérations sont souvent abrégées. Cette idée, émise pour la première fois dans le journal de Gergonne, a été reproduite récemment par M. Cauchy.

Ce livre semble n'être pas à sa place, non plus que le suivant, consacré aux proportions et progressions arithmétiques et géométriques. A cette occasion, nous croyons utile de rappeler une idée ingénieuse de M. Roche, professeur d'artillerie; l'on $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\text{etc.}=\frac{1}{3}$; a donc pour prendre le tiers d'un arc de cercle, on en prend la moitié, résultat trop grand; on en retranche le quart, résultat trop petit; on y ajoute le seizième, résultat trop grand et ainsi de suite; un semblable procédé existe, pour obtenir le septième d'un arc

Le livre XIe est un développement très-lucide et très-complet de ce qu'il faut savoir sur les logarithmes et la construction des tables. Un tableau très-commode montre d'une manière intuitive les calculs qu'il faut faire pour obtenir le logarithme de 2. L'auteur suit la méthode népérienne en considérant deux progressions, arithmétique et géométrique, qui se correspondent, mais cela ne dispense pas de recourir à la méthode exponentielle; la seule qui permette de démontrer que dans chaque système, tout nombre positif a une infinité de logarithmes, dont un seul est réel, et tout nombre négatif a aussi une infinité de logarithmes dont aucun n'est réel. Ce qui me porte à penser qu'on devrait accorder l'entrée dans les éléments aux équations exponentielles et en déduire la théorie logarithmique, comme Euler a fait dans son algèbre; l'auteur fait d'utiles observations sur les limites d'erreur des tables.

La résolution complète des équations du premier degré, à une inconnue et à plusieurs inconnues avec la discussion des formules, avec le problème des courriers; la résolution des équations du deuxième degré à une inconnue, avec le problème des lumières forment la matière du XII^e et du XIII^e livre; et à la fin de ce livre, on trouve la sommation des suites, des nombres figurés et des piles de boulets.

Le XIV^e et dernier livre concerne les règles d'intérêt, simple et composé, les annuités, règle de société; le tout est terminé par l'analyse indéterminée du premier degré, et la résolution des équations trinômes réductibles au deuxième degré.

Le vénérable auteur prépare une seconde édition, où il ajoutera la théorie générale des équations comprenant le théorème de Descartes, de Rolle; la résolution numérique des équations, les théorèmes de Lagrange et de M. Sturm; et cet ouvrage, ainsi complété, sera étudié avec fruit par les élèves qui se destinent aux Écoles du gouvernement et principalement à l'Ecole normale et à l'École polytechnique. L'algèbre y occupe le premier rang, celui qu'elle doit avoir dans toutes les sciences de calcul.

Le savant examinateur de la marine voudra bien nous permettre quelques observations sur les dispositions de certains livres du tome second; l'ordre méthodique me paraît exiger cette succession: VIII, XII, XIII, X, XI, IX, XIV; la sommation des suites, fin du livre XIII, devrait terminer le livre X, qui traite des progressions; l'analyse indéterminée du livre XIV serait mieux à la fin du livre XII; et la résolution des équations trinômes doit être portée à la fin du livre XIII.

L'ouvrage de M. Fournier, imprimé à Nantes, n'a eu qu'une faible publicité dans la capitale. Nous finirons par un conseil, dans l'intérêt de la science, qui gagne à la propagation des bonnes idées. Nous engageons l'auteur à ne pas se contenter de bien travailler ses productions; mais de prendre aussi les petites précautions qui en assurent le succès. *Habent sua fata libelli* Tm.