THIBAULT

Théorèmes nouveaux sur les fractions périodiques. Nombre exact des chiffres de la période pour toute fraction ordinaire donnée, dont le dénominateur ne contient pas de facteurs premiers plus grands que 101

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 80-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__80_0>

THÉORÈMES NOUVEAUX

SUR LES FRACTIONS PÉRIODIQUES.

Nombre exact des chiffres de la période pour toute fraction ordinaire donnée, dont le dénominateur ne contient pas de facteurs premiers plus grands que 101 (*).

PAR M. THIBAULT,

Professeur à Paris, licencie ès sciences mathématiques et ès sciences physiques.

—

I. *Deux fractions irréductibles* $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}$, $\frac{\mathrm{n}'}{\mathrm{d}'}$ *ayant été converties en fractions décimales, si ces dernières sont périodiques, elles ont un même nombre de chiffres à leurs périodes, toutes les fois que les dénominateurs* d, d' *sont égaux, ou ne diffèrent entre eux que par des facteurs puissances de* 2 *ou de* 5.

Supposons d'abord que d, d', ne contiennent aucun des deux facteurs 2, 5 ; alors, $d'=d$. Appelons m, m', les nombres de chiffres des périodes des deux fractions ; il faut faire voir qu'on a $m=m'$. Dans la première fraction une période commence à la virgule et se termine au chiffre de rang m ; donc n et $n.10^m$ divisés par d, donnent le même reste. Ainsi d divise $n.10^m-n$, ou $n(10^m-1)$. Mais d est premier avec n, donc li divise 10^m-1, et, par conséquent, son multiple $n'.10^m-n'$. Donc n' et $n'.10^m$ divisés par d donnent le même reste ; ainsi, dans la seconde fraction l'une des périodes se termine au chiffre de rang m ; mais cette période a

(*) Cette note peut faire suite à celle de M. Catalan, insérée dans le numéro de novembre dernier.

m' chiffres, donc m' ne surpasse pas m On démontrerait de même que m ne surpasse pas m'.

Si l'un des dénominateurs, ou tous les deux, contiennent des facteurs de 10, les fractions peuvent se mettre sous la forme $\frac{n}{10^{\alpha}d}$, $\frac{n'}{10^{\alpha'}d'}$, en multipliant haut et bas par des puissances convenables de 2 ou 5. Ainsi, les fractions décimales correspondantes ne différant que par la place de la virgule de celles qui correspondent à $\frac{n}{d}$, $\frac{n'}{d'}$, leurs périodes sont les mêmes que celles de ces dernières fractions, et ont par conséquent un même nombre de chiffres.

II. *Si deux fractions irréductibles* $\frac{N}{D}$, $\frac{n}{d}$ *converties en décimales donnent lieu à des périodes composées respectivement de* M, m *chiffres, dans le cas où* D *est divisible par* d, *le nombre* M *est également divisible par* m.

Remplaçons par l'unité les numérateurs des deux fractions proposées, et supprimons aux dénominateurs tous les facteurs 2, 5 qu'ils peuvent contenir. Les deux nouvelles fractions $\frac{1}{D}$, $\frac{1}{d}$, conduiront encore à des périodes de M et m chiffres (1). Dans la fraction décimale égale à $\frac{1}{D}$ une période commence à la virgule et finit au chiffre de rang M. Donc, $10^{M}-1$ est divisible par D; et par conséquent par d sous-multiple de D. Donc, l'une des périodes de la fraction décimale égale à $\frac{1}{d}$ se termine au chiffre de rang M. La première de ces périodes commençant d'ailleurs à la virgule, il se trouve ainsi un nombre exact de périodes dans l'ensemble des M premiers chiffres. Puisque ces périodes ont m chiffres, M est donc multiple de m.

III. *Si plusieurs fractions irréductibles, dont les dénominateurs sont premiers entre eux, ou n'ont pas d'autres facteurs premiers communs que des puissances de 2 ou 5, donnent lieu à des périodes de m, m', m'',..... chiffres, toute fraction irréductible ayant pour dénominateur le produit des dénominateurs des premières, conduit à une période dont le nombre* M *des chiffres est le plus petit multiple de m, m', m'', etc.*

Remplaçons, comme plus haut, tous les numérateurs par l'unité, et supprimons aux dénominateurs tous les facteurs 2, 5. Les nouvelles fractions $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{d'}$, $\frac{1}{d''}$, ..., $\frac{1}{dd'd''}$..... donneront encore lieu à des périodes de m, m', m'', ..., M chiffres. Appelons M_1 le plus petit multiple commun de m, m', m'', etc. La division par d de 10^m, et, par conséquent, de 10^{M_1} donne pour reste 1 ; donc $10^{M_1}-1$ est divisible par d. Il est de même divisible par d', d'', etc., mais ces nombres sont premiers entre eux, donc $10^{M_1}-1$; est divisible par $dd'd''$..... Ainsi, dans la fraction décimale égale à $\frac{1}{dd'd''}$..... l'une des périodes se termine au chiffre de rang M_1; mais cette période a M chiffres, donc M ne surpasse pas M_1. D'un autre côté M étant multiple de tous les nombres m, m', m'', etc. (II), ne peut être moindre que M_1 leur plus petit multiple, donc il lui est égal.

IV. Si les dénominateurs des premières fractions contiennent des facteurs communs autres que 2 et 5, nommons D le plus petit multiple commun de ces dénominateurs débarrassés des facteurs 2, 5; toute fraction dont le dénominateur débarrassé des facteurs 2, 5 sera égal à D, conduit à une période dont le nombre des chiffres est encore le plus petit multiple des nombres de chiffres des périodes correspondantes aux premières fractions.

Cette proposition, qui comprend la précédente, se démontre de même en observant que $10^{M_1}-1$ multiple commun de d, d', d'', etc., est divisible par tous leurs facteurs premiers élevés aux plus hautes puissances où ils se trouvent, et, par conséquent, est divisible par le produit de ces puissances, c'est-à-dire par le plus petit multiple D des nombres d, d', d'', etc.

V. Il résulte du théorème III que pour connaître le nombre des chiffres de la période à laquelle donne lieu la conversion en décimales de la fraction irréductible $\frac{N}{2^p 5^q a^\alpha a'^{\alpha'} \ldots}$, dont le dénominateur est décomposé en facteurs premiers, il suffit de connaître les nombres de chiffres des périodes correspondantes à $\frac{1}{a^\alpha}$, $\frac{1}{a'^{\alpha'}}$, etc. Occupons-nous donc du calcul relatif à ces dernières fractions.

D'abord s'il s'agit d'une fraction $\frac{1}{a}$ dont le dénominateur est premier, on sait que le nombre des chiffres de la période est sous-multiple de $a-1$ (p. 462, t. I) (*). Le reste 1 qui est le premier reste périodique, ne pouvant se trouver qu'aux rangs sous-multiples exacts de $a-1$, il suffit de déterminer successivement les restes de ces divers rangs jusqu'à ce que l'on trouve l'un d'eux égal à l'unité, ce qu'on peut faire sans passer par tous les restes qui précèdent. Par exemple, si les restes de rangs n, n' sont r, r', celui de rang $n+n'$ sera le même que le reste de la division de rr' par le dénominateur; en effet, on a $10^n = \mathrm{M}a + r$, $10^{n'} = \mathrm{M}a + r'$, en désignant par $\mathrm{M}a$ un multiple quelconque de a, d'où résulte $10^{n+n'} = \mathrm{M}a + rr'$.

(*) Cette proposition, qui a lieu pour tout système de numération dont la base b n'est pas divisible par le nombre premier a, est fondee sur ce que la division de b^{a-1} par a donne pour reste 1, (theorème de *Fermat*); car il résulte de là que l'une des periodes se termine au chiffre de rang $a-1$, c'est-à-dire que les $a-1$ premiers chiffres composent un nombre exact de periodes.

On peut même pour simplifier employer les restes négatifs dans ce calcul, s'ils sont moindres que les restes positifs; mais alors il faut avoir soin de tenir compte de leurs signes dans la multiplication. On voit que si le reste d'un certain rang n est $a-1$ ou simplement -1, la période a nécessairement $2n$ chiffres; réciproquement si la période a $2n$ chiffres, le reste de rang n est toujours -1, car a divisant $10^{2n}-1$ ou $(10^n-1)(10^n+1)$, sans diviser 10^n-1 doit diviser 10^n+1.

VI. Quant au nombre des chiffres de la période correspondante à $\frac{1}{a^\alpha}$, nous savons déjà qu'il est multiple du nombre m des chiffres de la période correspondante à $\frac{1}{a}$ (théorème II); nous allons voir de plus que si ce nombre n'est pas le même pour $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a^2}$, il sera toujours $ma^{\alpha-1}$ pour la fraction $\frac{1}{a^\alpha}$. Plus généralement *si l'on désigne par* $\frac{1}{a^n}$ *la dernière des fractions successives* $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$,..... *qui donne lieu comme* $\frac{1}{a}$ *à une période de* m *chiffres, la fraction* $\frac{1}{a^\alpha}$ *donnera lieu à une période de* $a^{\alpha-n}$ *chiffres.* Cette proposition se ramène à démontrer que si trois de ces fractions prises successivement $\frac{1}{a^i}$, $\frac{1}{a^{i+1}}$, $\frac{1}{a^{i+2}}$, donnent des périodes de μ, μ', μ'' chiffres, μ' étant différent de μ, on aura $\mu'=\mu a$; que de plus μ'' sera aussi différent de μ' et par suite égal à $\mu' a$ ou μa^2.

En effet: 1° on obtiendra l'expression en décimales de $\frac{1}{a^{i+1}}$ en divisant par a celle de $\frac{1}{a^i}$. Les périodes nouvelles devant avoir un nombre μk de chiffres multiple de μ, chacune d'elles sera le quotient exact de k périodes successives de la fraction décimale équivalente à $\frac{1}{a_i}$. Désignons par p une de ces k périodes, il est facile de voir que leur ensemble a pour valeur

$$p^2a^i[10^{(k-2)\mu}+2.10^{(k-3)\mu}+3.10^{(k-4)\mu}+\ldots(k-2)10^\mu+(k-1)]+kp$$

Car l'ensemble des deux premières périodes est $p.10^\mu+p = p\,(a^ip+1)+p=p^2ai+2p$; multipliant cette quantité par 10^μ et ajoutant p on aura l'ensemble des trois premières périodes qui peut s'écrire $p^2a^i\,(10^\mu+2)+3p$, en remplaçant $2p.10^\mu$ par son égal $2p\,(a^ip+1)$ ou $2p^2ai+2p$; multipliant encore par 10^μ et ajoutant p on trouve de même pour l'ensemble des quatre premières périodes $p^2ai(10^{2\mu}+2.10^\mu+3)+4p$ à cause de $3p.10^\mu=3p(a^ip+1)=3p^2ai+4p$, et ainsi de suite.

L'expression précédente ne peut se diviser par a tant que l'on a $k<a$, puisque p et par conséquent kp ne contient pas alors le facteur premier a qui se trouve dans l'autre partie de l'expression totale. (En effet si p était multiple de a, chaque période de l'expression décimale de $\frac{1}{a^i}$, se divisant par a exactement, les quotients égaux de ces divisions seraient les périodes de l'expression décimale de $\frac{1}{a^{i+1}}$, périodes qui auraient ainsi μ chiffres comme les premières, ce qui est contre l'hypothèse). Il faut donc qu'on ait $k=a$, c'est-à-dire qu'on prenne a périodes pour en avoir le moindre nombre possible dont l'ensemble se divise par a, donc $\mu'=\mu a$.

2° Remplaçons k par a dans l'expression générale écrite plus haut et divisons par a; le quotient

$$p^2a^{i-1}[10^{(a-2)\mu}+2.10^{(a-3)\mu}+\ldots\ldots+(a-2)10^\mu+(a-1)]+p,$$

représente une période de l'expression en décimales de $\frac{1}{a^{i+1}}$.
La partie p n'est pas divisible par a, qui divise au contraire l'autre partie de cette expression, lors même que i est égal à 1. En effet, les termes du facteur entre les crochets sont des multiples de a augmenté respectivement de 1, 2, 3,... $(a-1)$, puisque 10^{μ} est un multiple de a augmenté de 1. Ce facteur peut donc s'écrire $Ma+1+2+3+\ldots(a-1)$, ou $Ma+\frac{a(a-1)}{2}$, quantité dont les deux termes sont divisibles par a. Ainsi a ne divise pas exactement les périodes de l'expression décimale de $\frac{1}{a^{\alpha+1}}$ prises chacune isolément, il faut donc diviser par a l'ensemble de plusieurs de ces périodes pour en obtenir une de l'expression décimale de $\frac{1}{{}^{\alpha+2}}$, donc μ'' est différent de μ'.

Ces considérations générales sont applicables à un système quelconque de numération, de même que tout ce qui précède, sauf les modifications évidentes relatives aux facteurs de la base.

VII. D'après les propositions que nous venons de démontrer, on peut être assuré que *dans l'expression décimale de* $\frac{1}{3^r}$ *la période est de* 3^{r-2} *chiffres*, puisqu'elle est d'un chiffre pour les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3^2}$, et d'un nombre plus considérable de chiffres pour la fraction $\frac{1}{3^3}$. Si l'on prend pour a l'un quelconque des 23 autres nombres premiers consécutifs 7, 11, 13, ... 101, on trouve que $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a^2}$ donnent lieu à des périodes d'un nombre différent de chiffres; donc, *le nombre des chiffres périodiques étant* m *pour la fraction* $\frac{1}{a}$, *il sera exactement* $ma^{\alpha-1}$ *pour la fraction* $\frac{1}{a^\alpha}$, a *étant un des nombres premiers* 7, 11, 13..... 101 (*).

VIII. Parmi les fractions de la forme $\frac{1}{a}$ dont le dénominateur est un nombre premier moindre que 100, il y en a dix qui donnent lieu à des périodes dont le nombre des chiffres est égal au dénominateur moins 1. Ce sont les suivantes : $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{23}, \frac{1}{29}, \frac{1}{47}, \frac{1}{59}, \frac{1}{61}, \frac{1}{71}, \frac{1}{97}$. (D'après la dénomination d'Euler, 10 est racine primitive à l'égard de chacun de leurs dénominateurs.) Quant aux autres fractions, le tableau suivant met en regard, au-dessous de chacune d'elles, le nombre des chiffres des périodes respectives de leurs expressions en décimales. Ces nombres sont les exposants des plus petites puissances de 10, qui, divisées par les dénominateurs respectifs, donnent pour reste l'unité.

$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{11}$,	$\frac{1}{13}$,	$\frac{1}{31}$,	$\frac{1}{37}$,	$\frac{1}{41}$,	$\frac{1}{43}$,	$\frac{1}{53}$,	$\frac{1}{67}$,	$\frac{1}{73}$,	$\frac{1}{79}$,	$\frac{1}{83}$,	$\frac{1}{89}$,	$\frac{1}{101}$.
1,	2,	6,	15,	3,	5,	21,	13,	33,	8,	13,	41,	44,	4

IX. Concluons des nos III, VII, VIII, qu'on peut con-

(*) Pour que $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a^2}$ donnent lieu à des périodes d'un même nombre m de chiffres il faut et il suffit que $b^{a-1}-1$ soit divisible par a^2, la base du système de numération étant le nombre b non divisible par le nombre premier a. En effet si 10^m divisé par a^2 donne 1 pour reste, il en est de même de 10^{a-1}, puisque $a-1$ est multiple de m. Réciproquement si b^{a-1} divisé par a^2 donne 1 pour reste, la période correspondante à $\frac{1}{a^2}$ a un nombre de chiffres sous-multiple de $a-1$, ce nombre de chiffres ne peut d'ailleurs être en général que m ou ma; ainsi dans le cas particulier que nous supposons, il ne peut-être que m, puisque ma n'est pas diviseur de $a-1$.

La divisibilité de $b^{a-1}-1$ par a^2 est évidente quand $b-1$ est multiple de a^2 comme il arrive pour $a=3$ dans le système décimal. Si l'on pouvait s'assurer qu'elle n'a lieu seulement alors, on en conclurait que dans tout autre cas la fraction $\frac{1}{a^\alpha}$ conduit à une période de $ma^{\alpha-1}$ chiffres.

naître exactement le nombre des chiffres de la période à laquelle donne lieu une fraction irréductible quelconque $\dfrac{N}{2^p.5^q.3^r.a^{\alpha}.a'^{\alpha'}}$, les facteurs premiers a, a',..... n'étant pas plus grands que 101. Ce nombre est le plus simple multiple de 3^{r-2}, $ma^{\alpha-1}$, $m'a'^{\alpha'-1}$, ..., les périodes correspondantes à $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{a'}$, ... ayant m, m', ... chiffres.

Exemples. 1° Soit proposée la fraction $\dfrac{N}{91}=\dfrac{N}{7.13}$. Les fractions $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{13}$ donnent lieu chacune à des périodes de 6 chiffres, il en est de même de $\dfrac{N}{91}$.

2° Soit $\dfrac{N}{4212}=\dfrac{N}{2^2.3^4.13}$. La période a 18 chiffres, puisque $\dfrac{1}{3^4}$, $\dfrac{1}{13}$ donnent lieu à des périodes, l'une 3^{4-2} ou 9 chiffres, l'autre de 6 chiffres.

3° Soit $\dfrac{N}{12495}=\dfrac{N}{5.3.7^2.17}$. Le nombre des chiffres de la période est 336, multiple le plus petit de 1, 6.7, 16, qui correspondent à $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{7^2}$, $\dfrac{1}{17}$.

4° Soit $\dfrac{N}{1658200}=\dfrac{N}{2^3.5^2.7^3.13^2}$, la période aura 3722 chiffres, ce nombre étant le plus petit multiple de 6.7^2, 6.13, qui correspondent à $\dfrac{1}{7^3}$, $\dfrac{1}{13^2}$.

Remarque. En terminant cette note j'indiquerai une exception au théorème énoncé (p. 469, tome I). « Si $\dfrac{N}{D}$ a son dénominateur premier, et si $D-1=mp$, la somme de n restes périodiques pris de m en m est un multiple de D. »

Cette proposition vraie, en général, ne l'est pas si m est le nombre même des chiffres de la période, ou un multiple de ce nombre. La fraction $\frac{1}{13}$, prise pour exemple à l'article cité, peut aussi servir d'exemple pour cette exception ; les restes étant 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, ... qui se reproduisent périodiquement de 6 en 6 ; si l'on décompose $13-1$ en 6×2, il est évident que la somme de 2 restes quelconques pris de 6 en 6, ne peut être un multiple de 13. La démonstration donnée de cette proposition suppose en effet la condition, tacitement admise par l'auteur, que le reste R de la division de 10^m par D n'est pas l'unité.

La démonstration de ce théorème peut encore être présentée, en général et directement, de la manière suivante : désignons par b la base du système de numération, par $R_1, R_2, \ldots R_n$ les n restes pris au hasard de m en m, et par MD un multiple quelconque de D ; on a, d'après la marche du calcul ordinaire :

$$\begin{aligned} R_1 b^m &= MD + R_2 \\ R_2 b^m &= MD + R_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n b^m &= MD + R_1 \end{aligned}$$

Transposant les termes $R_2, R_3, \ldots R_n, R_1$ dans les premiers membres, et additionnant les égalités, il vient $(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)(b^m - 1) = MD$, d'où l'on conclut que D divise $R_1 + R_2 \ldots + R_n$ s'il ne divise pas $b^m - 1$, c'est-à-dire si la période n'a pas un nombre de chiffres égal à m ou sous-multiple de m (*).

(*) On peut consulter un memoire de M. Penjon (*Gergonne*, tome IV, p. 265 ; 1813-14).