NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Considérations sur le triangle rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 544-547

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__544_1>

CONSIDERATIONS SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE.

(V. p. 79 et 196, t. I.)

27. L'angle AEB est supplément de l'angle C; ainsi le cercle qui passe par les trois point A, B, E est égal au cercle qui passe par les trois points A, B, C : on a donc ce théorème

« Le cercle qui passe par deux sommets d'un triangle et par le point de rencontre des trois hauteurs est égal au cercle circonscrit au triangle. »

28 Désignons par G', G'', G''' les centres des trois cercles ex-inscrits dans les angles C. B, A ; le triangle $G'G''G'''$ est circonscrit au triangle ABC ; l'angle G''' opposé à A, est égal à $90°-\frac{1}{2}A$; l'angle $G''=90°-\frac{1}{2}B$ et l'angle $G'=90°-\frac{1}{2}C$, d'où

$$\sin G''' = \cos\frac{1}{2}A,\ \sin G'' = \cos\frac{1}{2}B;\ \sin G' = \cos\frac{1}{2}C.$$

l'aire du triangle G'G''G''' est la somme des aires des quatre triangles ABC, ABG', ABG'', BCG''', or l'on a évidemment

$$\text{aire ABG}' = \frac{cS}{a+b-c} \,.\, \text{aire ACG}' = \frac{bS}{a+c-b} \,;\, \text{aire BCG}''' = \frac{aS}{b+c-a} \,;$$

un calcul facile, fondé sur les fonctions symétriques, donne donc aire $G'\,G''\,G''' = \frac{pr}{4S} = t.$

29. Soient $G''\,G''' = m'$; $G'\,G''' = m''$; $G'\,G'' = m'''$, on aura

$$t = \frac{1}{2}\, m'm'' \cos\frac{1}{2}\,A = \frac{1}{2}\, m'm''' \cos\frac{1}{2}\,B = \frac{1}{2}\, m''m' \cos\frac{1}{2}\,C,$$

d'où $t^3 = \frac{1}{8}\,(m'm''m''')^2 \cos\frac{1}{2}\,A \cos\frac{1}{2}\,B \cos\frac{1}{2}\,C.$

On a $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; et de là $\cos^2\frac{1}{2}\,A = \frac{p(b+c-a)}{4bc}$,

ainsi $\left(\cos\frac{1}{2}\,A \cos\frac{1}{2}\,B \cos\frac{1}{2}\,C\right)^2 = \frac{pS^2}{4r^2}$,

$$\cos\frac{1}{2}\,A \cos\frac{1}{2}\,B \cos\frac{1}{2}\,C = \frac{pS}{2r} \,;\ \text{d'où}$$

$$(m'm''m''')^2 = \frac{8t^3}{\cos\frac{1}{2}\,A \cos\frac{1}{2}\,B^4\,\frac{1}{2}\,C} = \frac{16t^3r}{pS} = \frac{16r^4p}{S^4}$$

$$\text{et } m'm''m''' = \frac{4r^2p}{S^2}$$

de là le rayon du cercle circonscrit à $G'G''G''' = \frac{m'm''m'''}{4t} = \frac{r}{2S}$,

or, le rayon du cercle circonscrit est $\frac{r}{4S}$, nous avons donc ce théorème :

« Le rayon du cercle qui passe par les centres de trois cercles ex-inscrits est le double du rayon du cercle circonscrit. »

30. L'angle G''GG''' est le supplément de l'angle G''G'G''', donc le cercle qui passe par les trois points G''. G''', G est

égal à celui qui passe par les trois points G′, G″, G‴ ; de là ce théorème :

La circonférence qui passe par trois quelconques des centres des cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle est double de la circonférence circonscrite.

On a $$2m'm''\mathrm{S}\cos\frac{1}{2}\mathrm{A} = pr\ (29),$$

d'où, en remplaçant $\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}$ par sa valeur

$$m'^2m'^2 = \frac{pr'}{\mathrm{S}^2}\cdot\frac{bc}{b+c-a},$$

on a deux équations semblables pour $m'^2m''^2$, $m'''^2m'''^2$, et l'on en tire

$$m''^2 = \frac{prb(a+c-b)}{4\mathrm{S}^2};\ m'^2 = \frac{prc(a+b-c)}{4\mathrm{S}^2},\ m'''^2 = \frac{pra(b+c-a)}{4\mathrm{S}^2}$$

32. Le théorème du § 29 se démontre facilement par des considérations géométriques. En effet, les trois bissectrices sont les hauteurs du triangle G′G″G‴, et les trois sommets du triangle ABC sont les pieds de ces hauteurs Or, le cercle circonscrit au triangle G′G″G‴ est évidemment le double du cercle des neuf points qui passent par les sommets A, B, C, etc., donc..... (*Voir* p. 197, t. I).

Sur les trois hauteurs du triangle.

33. Soient h', h'', h''' les trois hauteurs : la première relative au côté a, la seconde à b et la troisième à c ; on a donc $ah' = bh'' = ch''' = 2\mathrm{S}$. Concevons un second triangle ayant pour côtés $\frac{h''h'''}{z}$, $\frac{h'h'''}{z}$, $\frac{h'h''}{z}$, z étant une longueur quelconque ; ce second triangle est évidemment semblable au premier, savoir : le premier côté est homologue au côté a, le second au côté b et le troisième au côté c. Soit σ l'aire de ce second triangle, on aura

$$16z^4\sigma^2 = 2h'^2h''^2h'''^2(h'^2+h''^2+h'''^2) - h'^4h''^4 - h'^4h'''^4 - h''^4h'''^4 = 16\,\mathrm{H}^2$$

$z^2\sigma = \mathrm{H}$; la hauteur relative à la base $\frac{h''h'''}{z}$ est $\frac{2z\sigma}{h''h'''}$ ou $\frac{2\mathrm{H}}{zh''h'''}$; on a donc la proportion

$$\mathrm{S}:\sigma::h'^2:\frac{4\mathrm{H}^2}{z^2h''^2h'''^2};\quad \mathrm{S}=\frac{z^2h'^2h''^2h'''^2\sigma}{4\mathrm{H}^2}=\frac{h'^2h''^2h'''^2}{4\mathrm{H}},$$

d'où $\quad a=\frac{h'h''^2h'''^2}{2\mathrm{H}},\ b=\frac{h'^2h''h'''^2}{2\mathrm{H}},\ c=\frac{h'^2h''^2h'''}{2\mathrm{H}}.$

Ainsi, connaissant les trois hauteurs, on peut calculer les trois côtés et même logarithmiquement; car H, comme on sait, se décompose en facteurs; la solution géométrique du problème ne présente aucune difficulté.

34. On a

$$a+b+c=\frac{h'h''h'''(h'h''+h'h'''+h''h''')}{2\mathrm{H}},\quad abc=\frac{h'^5h''^5h'''^5}{8\mathrm{H}^3};$$

donc $\quad \mathrm{R}=\frac{h'^3h''^3h'''^3}{8\mathrm{H}^2};\ \rho=\frac{h'h''h'''}{h'h''+h'h'''+h''h'''},$

ou $$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}+\frac{1}{h'''},$$

ce qui fournit cet énoncé :

Théorème. La réciproque du rayon inscrit est égale à la somme des réciproques des trois hauteurs; la démonstration peut se faire plus brièvement par la voie directe. En effet,

$$\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}+\frac{1}{h'''}=\frac{a+b+c}{2\mathrm{S}}=\frac{1}{\rho}.$$

35. On a aussi $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}+\frac{1}{\rho'''}$ (p. 200, t. I); donc la somme des réciproques des trois hauteurs est égale à la somme des réciproques des trois rayons des cercles ex-inscrits.

On a d'ailleurs, pour l'expression de ces rayons, les valeurs suivantes :

$$\frac{h'h''h'''}{h'h''+h'h'''-h'h''};\ \frac{h'h''h'''}{h'h''+h''h'''-h'h'''};\ \frac{h'h''h'''}{h'h'''+h''h'''-h'h''}$$

Tm.