NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P.-A. BRETON

Du choix de l’exemple particulier pour la discussion des équations du premier degré dans l’enseignement

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 539-544

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__539_0>

DU CHOIX DE L'EXEMPLE PARTICULIER

pour la discussion des équations du premier degré dans l'enseignement.

PAR M. P-A. BRETON,
Ingenieur des ponts et chaussees.

Monge avait dit que tout calcul algébrique où le nombre des variables ne dépasse pas trois, est l'écriture d'une figure en géométrie, et que réciproquement toute opération géométrique représente un calcul algébrique.

Je crois qu'on est bien loin d'avoir tiré de cette remarque importante tout le secours qu'elle peut fournir à l'enseignement : Monge et, après lui, les auteurs des cours de géométrie descriptive ont traité les constructions géométriques par les procédés purement géométriques, et on enseigne, en général, séparément la géométrie descriptive et la géométrie analytique.

L'enseignement gagnerait beaucoup à l'emploi d'une sorte de mélange, le plus intime possible, de ces deux branches de la science. Il faudrait simplement que l'élève traçât des épures dont toutes les lignes seraient cotées par leur équation, et tous les points cotés par leurs coordonnées, suivant une échelle indiquée sur l'épure.

Pour cela, après avoir choisi et rapporté les données suivant l'echelle, l'élève aurait à effectuer une série de calculs numériques dont les règles sont contenues dans les formules de la géométrie analytique. Et remarquez que c'est la marche suivie de fait, dans un grand nombre d'applications · ainsi, tous les jours les architectes, les mécaniciens, les ingénieurs, construisent des dessins cotés, dans lesquels beaucoup de résultats sont déterminés à la fois par le trait et par le calcul, qui se vérifient mutuellement. La marche que je propose aurait donc déjà l'avantage de préparer l'élève aux applications pratiques. Aussi voyons-nous que c'est un ingénieur en chef des ponts et chaussées (M. Cousinery) qui a donné un traité du calcul par le trait.

Mais l'objet de cette note est principalement de montrer l'avantage que retirerait l'enseignement de l'algèbre d'une alliance plus intime avec la géométrie, si on avait soin d'effectuer cette alliance à partir de la discussion des équations *du premier degré.*

L'usage est de choisir le problème des courriers pour discuter les racines d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Cet exemple me semble mal choisi pour deux raisons 1° Il s'agit de déterminer un temps et une longueur, qui sont deux quantités hétérogènes ; il est évidemment utile que l'élève puisse saisir facilement la symétrie des opérations qu'il pratique sur les deux inconnues, et pour cela il faudrait deux quantités homogènes.

2° Quand l'élève a résolu algébriquement le problème des courriers, s'il en fait une application numérique, il n'aura qu'un résultat de calcul qu'il *ne pourra réaliser sans de grandes difficultés* : il lui faudrait placer sur une même ligne *deux curseurs assujettis à se mouvoir avec des vitesses uniformes* et choisies arbitrairement, et compter sur une horloge le temps employé par les deux curseurs pour se réunir.

Si, au contraire, on suppose que l'élève connaisse déjà en géométrie les propriétés des triangles semblables, cela suffira pour qu'il puisse comprendre comment une ligne droite représente une équation à deux variables, et un très court *exercice l'habituera à tracer une ligne droite donnée par son* équation, et à trouver l'équation d'une ligne droite déjà tracée. La recherche des points d'intersection de cette droite avec les axes coordonnés fournira un premier exemple très-clair pour discuter l'équation générale du premier degré à une inconnue.

Ce serait une erreur de croire qu'il faut pour cela posséder déjà quelques notions de trigonométrie, afin de faire entrer dans le calcul la tangente d'un angle. On n'a à considérer en effet que le rapport des accroissements simultanés des deux coordonnées, qu'on peut appeler une *pente*. Tous les jours une foule d'employés des ponts et chaussées calculent des intersections de lignes droites en divisant la différence de deux ordonnées par la différence algébrique des pentes, sans pour cela avoir besoin d'aucune notion de trigonométrie.

En exerçant ensuite l'élève à mener, par le calcul et par le trait, une droite par deux points donnés, la discussion des grandeurs et des signes de la pente fournirait un deuxième exemple très-utile de discussion d'une équation à une seule inconnue.

Ensuite le calcul et la construction du point de rencontre de deux lignes droites, fournira une base très-commode pour discuter un système de deux équations à deux inconnues. Dans le cas où les valeurs des inconnues deviennent toutes deux infinies, comme elles sont homogènes, il est naturel de demander ce que devient le rapport de ces deux infinis : on voit sans peine, soit par le calcul, soit par le trait, que ce rapport se réduit à la pente commune des deux droites. Il serait impossible, ou du moins bien difficile, de donner à ce rapport une signification facile à saisir, quand on discute ce système de deux équations sur l'exemple du problème des *courriers*.

On objecte que ce serait sortir de l'algebre pure, mais je réponds qu'en prenant deux points qui se meuvent avec des vitesses uniformes, on ne s'écarte pas moins de l'algèbre pure, car on fait de la mécanique : je crois seulement qu'il vaut mieux prendre un exemple dans la géométrie. Si on veut rester dans l'algèbre pure, il faut alors établir la discussion sans le secours d'aucun exemple, et je doute que ce parti soit préféré par aucune personne ayant un peu d'expérience de l'enseignement.

Mais l'exemple des courriers ne peut plus servir dès que l'on veut considérer trois inconnues. Si on a employé celui des deux lignes d.oites pour deux inconnues, il sera bien facile de donner une discussion complète d'un système de trois équations à trois inconnues, en prenant pour exemple l'intersection de trois plans.

A cet effet, il faudra que l'élève possède les notions géométriques principales sur les plans dans l'espace, et on lui fera facilement concevoir comment une équation de 1er degré à trois inconnues représente un plan dans l'espace ; il sera nécessaire en outre de l'exercer à quelques épures de géométrie descriptive, savoir :

1° Tracer deux projections d'une droite donnée par ses équations, ou par ses deux traces.

2° Construire les traces d'un plan donné par ses équations.

3° Construire l'intersection de deux plans.

4° Construire l'intersection de trois plans.

Et toujours ces épures devront être calculées et cotées en même temps que dessinées.

Alors on établira une discussion sur le système des solutions des équations de trois plans, dans laquelle on aura à distinguer un plus grand nombre de cas particuliers que pour deux équations à deux inconnues.

En effet, les trois racines étant finies, on aura 8 cas à distinguer suivant les combinaisons de leurs signes.

Quand les racines deviendront infinies, il faudra distinguer le cas où les 3 intersections, 2 à 2, des plans seront parallèles ;

celui où deux des plans, deviendront parallèles, celui où les trois plans deviendront parallèles, et dans ce dernier cas, il faudra en outre distinguer celui où deux de ces trois plans parallèles se confondent.

Quand les racines se présenteront sous cette forme $\frac{0}{0}$, on aura à distinguer le cas où les trois plans se coupent suivant une seule ligne droite, celui où deux des plans se confondent, celui où tous les plans se confondent.

La recherche des caractères analytiques de tous ces cas ne peut manquer de constituer un exercice utile, surtout en ayant soin de faire construire pour chacun une épure cotée ; et le temps nécessaire pour épuiser de cette manière la discussion des équations du 1er degré jusqu'au nombre de trois inconnues inclusivement serait moins long qu'on ne le croirait au premier coup d'œil. D'ailleurs la facilité que cet exercice assurerait à l'élève pour les études ultérieures donnerait en définitive une économie notable de temps.

Il me semble qu'à l'époque actuelle l'innovation que je propose est éminemment opportune : cela paraît assez indiqué par l'emploi de plus en plus fréquent des courbes figuratives dans une foule d'applications, et par celui des surfaces figuratives, qui a donné lieu récemment à une communication intéressante de M. Lalanne à l'Académie des sciences, et à la publication par le ministère des travaux publics de *tables graphiques à double entrée*, propres à accélérer extraordinairement les calculs de terrassements de toutes sortes de voies.

Note. La géométrie ordinaire, la géométrie descriptive, la trigonométrie, les sections coniques, devraient constituer un seul et même enseignement. Mon manuel de géométrie en montre la possibilité ; mieux présentée, plus convenablement développée, cette méthode serait la plus courte, la plus facile, la plus appropriée à propager la science. A cet effet, les procédés du calcul littéral, la résolution des équations des deux premiers degrés, devrait suivre l'arithmétique et précéder l'enseignement géométrique, et c'est une marche assez généralement suivie. Lorsque les élèves en sont aux équations du 1er degré, ils ne connaissent pas encore les théorèmes nécessaires pour comprendre *les pentes*. Le problème des courriers appartient au fond commun de l'intelligence, et ne présente aucune difficulté, lorsque les courses s'exécutent sur des lignes fermées. La proportionnalité entre des quantités hétérogènes telles que l'espace et le temps, est une notion familière aux élèves dès l'arithmétique. Tm.