NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RISPAL

Détermination des tangentes aux courbes polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 511-514

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__511_0>

DÉTERMINATION DES TANGENTES AUX COURBES POLAIRES,

PAR M. RISPAL,
Élève du collége de Rouen.

—

Soit ABC (*fig.* 103), une courbe dont l'équation polaire est $\rho = f\omega$; menons une sécante qui la coupe en B et en C. Menons les rayons vecteurs OB, OC. Soit

$$OB = \rho,\ BOD = \omega,\ COB = h,\ OC = \rho_1,\ BDA = \alpha,\ BC = n.$$

Il est clair que l'on a $\rho = f\omega$, $\rho_1 = f(\omega + h)$; à la limite, lorsque la sécante est devenue tangente, $h = 0$, si donc nous pouvons déterminer α dans ce cas, nous connaîtrons alors la direction de la tangente.

Le triangle COB nous donne $n^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos h$,

(1) ou $$n^2 = f^2\omega + f^2(\omega + h) - 2f\omega f(\omega + h)\cos h.$$

Le même triangle donne encore

(2) $$\frac{\sin C}{\sin h} = \frac{f(\omega)}{n};$$

or $C + \omega + h + \alpha = \pi$, donc $C = \pi - [\omega + h + \alpha]$

et $\sin C = \sin(\omega + \alpha + h)$;

l'équation (2) devient ainsi

$$\sin(\omega + \alpha + h) = \frac{f\omega.\sin h}{n},$$

de cette dernière, on tire $n = \dfrac{f\omega.\sin h}{\sin(\omega + \alpha + h)}$

et en substituant cette valeur dans l'équation (1), on a

$$\frac{f^2\omega \sin^2 h}{\sin^2(\omega + \alpha + h)} = f^2\omega + f^2(\omega + h) - 2f\omega f(\omega + h)\cos h,$$

d'où

$$\sin^2(\omega + \alpha + h) = \frac{f^2\omega(1 + \cos h)(1 - \cos h)}{f^2\omega + f^2(\omega + h) - 2f\omega f(\omega + h)\cos h}$$

Cette dernière valeur se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $h=0$, ce qui nous indique la présence d'un facteur commun que nous devons faire disparaître.

On sait que l'on peut faire, successivement, les dérivées des deux termes de la fraction, jusqu'à ce que l'on en trouve une qui ne se réduise plus à $\frac{0}{0}$ pour $h=0$, et la valeur que l'on trouve alors est celle que doit prendre en effet, la fonction.

Ici la dérivée première prise par rapport à h, devient encore indéterminée. Cette dérivée est ici

$$\frac{f^2\omega \sin h \cos h}{f'(\omega+h)f'(\omega+h)-f\omega f''(\omega+h)\cos h+f\omega f'(\omega+h)\sin h}$$

et lorsqu'on y fait $h=0$, elle devient $\frac{0}{0}$.

Si on passe à la dérivée seconde, on a

$$\frac{f^2\omega \cos^2 h - f^2\omega \sin^2 h}{\begin{array}{l} f'^2(\omega+h)+f'(\omega+h)f''(\omega+h)-f\omega f''(\omega+h)\cos h+ \\ +f\omega f''(\omega+h)\sin h+f\omega f'(\omega+h)\sin h+f\omega f'(\omega+h)\cos h \end{array}}$$

et lorsqu'on y fait $h=0$, on trouve pour la limite cherchée

$$\sin^2(\omega+\alpha)=\frac{f^2\omega}{f^2\omega+f'^2\omega},$$

ou $\sin^2(\omega+\alpha)=\frac{\rho^2}{\rho^2+\rho'^2}$ (en désignant par ρ' la dérivée de ρ), valeur qui détermine $\omega+\alpha$ et par suite α.

Comme on est obligé de faire deux dérivations, on en conclut que le facteur commun était h^2.

Au lieu d'employer la méthode des dérivations successives qui tient au calcul différentiel, on peut suivre une voie plus élémentaire, mais aussi plus longue.

Nous avions donc trouvé

$$\sin^2(\omega+\alpha+h)=\frac{f^2\omega\,(1+\cos h)\,(1-\cos h)}{f^2\omega+f^2(\omega+h)-2f\omega f(\omega+h)\cos h}$$

on sait par la trigonométrie que $\cos h = 1-\frac{h^2}{1.2}+\ldots$,

donc $\quad 1-\cos h = h^2\left(\frac{1}{1.\ 2}-\frac{h^2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}+\ldots\right)$;

le numérateur sera donc

$$P=f^2\omega\,(1+\cos h)\,h^2\left[\frac{1}{1.\ 2}+\ldots \text{ termes en } h\right];$$

passons au dénominateur.

On a $\quad f(\omega+h)=f\omega+\frac{h}{1}f'\omega+\frac{h^2}{1.\ 2}f''\omega+\ldots,$

donc $\quad f^2(\omega+h)=f^2\omega+2f\omega.f'\omega\, h+\left.\begin{array}{l}f\omega f''\omega\\ +f'^2\omega\end{array}\right| h^2+\ldots$

et $\quad 2f\omega f(\omega+h)\cos h=2f^2\omega\cos h+2f\omega f'\omega\cos h.\,h+$
$\quad +f\omega f''\omega\cos h.\,h^2+\ldots;$

donc, en désignant le dénominateur par Q, on aura

$$Q=(1-\cos h)\,[2f^2\omega+2f\omega f'\omega h+\ldots]+$$
$$+h^2\,[f'^2\omega+\text{ termes en } h];$$

remplaçant $1-\cos h$ par sa valeur trouvée plus haut, on a pour la fraction $\sin^2(\omega+\alpha+h)$.

$$\frac{f^2\omega\,(1+\cos h)\left[\frac{1}{1.2}+\text{ termes en } h\right]}{\left[\frac{1}{1.2}+\text{termes en } h\right][2f^2\omega+\text{term. en} h]+[f'^2\omega+\text{term. en} h]}$$

Si maintenant on y fait $h=0$ on trouve

$$\sin^2(\omega+\alpha)=\frac{f^2\omega}{f^2\omega+f'^2\omega},$$

car les termes en h disparaissent lorsque l'on fait $h=0$, et comme $\rho=f\omega$, on aura $\sin^2(\omega+\alpha)=\frac{\rho^2}{\rho^2+\rho'^2}$; de là on tire $\cos^2(\omega+\alpha)=\frac{\rho'^2}{\rho^2+\rho'^2}$, et par suite $\operatorname{tg}^2(\omega+\alpha)=\frac{\rho^2}{\rho'^2}$, et enfin $\operatorname{tg}(\omega+\alpha)=\pm\frac{\rho}{\rho'}$

Comme application prenons l'équation $\rho = a \cos \omega$ qui en coordonnées rectangulaires, représente le cercle $y^2 = ax - x^2$; on a

$\rho' = -a \sin \omega$, d'où $\operatorname{tg}(\omega + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \omega}$, et comme $\operatorname{tg} \omega =$

$= \frac{y'}{x'}$, $\operatorname{tg}(\omega + \alpha) = -\frac{x'}{y'}$, $\operatorname{tg}''(\omega + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \alpha} =$

$= \frac{y' + x' \operatorname{tg} \alpha}{x' - y' \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{x'}{y'}$, d'où $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'^2 - x'^2}{2 y' x'}$; or comme

$y'^2 = ax' - x'^2$, on a $tg\ \alpha = \frac{a - 2x'}{2 y'}$.

Or si on différencie l'équation $y^2 = ax - x^2$, on trouve $2 y' dy' = adx' - 2x' dx'$, d'où l'on tire en effet

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{a - 2 x'}{2 y'}.$$

Il est inutile de multiplier les exemples.

N. B. En développant la formule, on trouve

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\rho + \rho' \operatorname{tg} \omega}{\rho' - \rho \operatorname{tg} \omega}$. On aurait pu y arriver plus rapidement de la manière suivante en effet $tg\ \alpha = \frac{dy}{dx}$ comme on sait; si on passe de là aux coordonnees polaires, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d(\rho \sin \omega)}{d(\rho \cos \omega)} =$

$= \frac{\sin \omega.\ d\rho + \rho \cos \omega.\ d\omega}{\cos \omega.\ d\rho - \rho \sin \omega.\ d\omega}$, divisant les deux termes par

$\cos \omega.\ d\omega$ on trouve $tg\ \alpha = \frac{\rho + \frac{d\rho}{d\omega} \operatorname{tg} \omega}{\frac{d\rho}{d\omega} - \rho \operatorname{tg} \omega}$ or $\frac{d\omega}{d\rho} = \rho'$, et l'angle α est compté ici dans un sens inverse. On retombe ainsi sur l'équation $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\rho + \rho' \operatorname{tg} \omega}{\rho' - \rho \operatorname{tg} \omega}$.