NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VIDAL

Un cercle mobile a son centre sur une droite fixe et touche un cercle fixe ; quel est le lieu du pôle d'une seconde droite fixe relativement à ce cercle mobile ; que devient ce lieu, lorsque le cercle fixe se réduit à un point, ou devient une droite ?

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 499-505

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__499_1>

Un cercle mobile a son centre sur une droite fixe et touche un cercle fixe; quel est le lieu du pôle d'une seconde droite fixe relativement à ce cercle mobile; que devient ce lieu, lorsque le cercle fixe se réduit à un point, ou devient une droite?
(Q. 74, p. 328.)

PAR M. VIDAL,
Élève du Collége de Montpellier

---

1. Je prendrai pour axe des x la droite sur laquelle doit

se trouver le centre du cercle mobile, et pour axe des y la perpendiculaire abaissée sur cette droite par le centre du cercle fixe. Si je designe par b l'ordonnée du centre du cercle fixe et par r son rayon, son équation sera

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Je désigne par a et r', l'abscisse du centre et le rayon du cercle mobile, son équation serait

$$(x - a)^2 + y^2 = r'^2. \qquad (1)$$

Il faut maintenant exprimer que ce cercle est tangent au cercle fixe. Il suffit d'écrire

$$r'^2 = (r \pm \sqrt{a^2 + b^2})^2.$$

Dans le deuxième membre, il faudra prendre le radical avec le signe $\pm$ parce que la longueur de la perpendiculaire peut être prise positivement ou négativement. En remplaçant r'^2 par cette valeur dans l'équation (1) il vient

$$(x - a)^2 + y^2 = (r \pm \sqrt{a^2 + b^2})^2, \qquad (2)$$

qui est maintenant l'équation d'un cercle ayant son centre sur la droite fixe et tangent au cercle donné. Soit $y = mx + g$ l'équation de la droite fixe; le pôle de cette droite se trouvera sur la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur cette droite, ses coordonnées devront donc satisfaire à l'équation

$$y = -\frac{1}{m}(x - a). \qquad (3)$$

Je désigne par (α, β) les coordonnées d'un point quelconque pris sur la droite fixe; si par ce point je mène deux tangentes au cercle (2), l'équation de la corde de contact sera

$$\alpha x + \beta y - a\alpha - ax + a^2 = (r \pm \sqrt{a^2 + b^2})^2.$$

Il faut exprimer que le point (α, β) est sur la droite fixe.

pour cela il n'y a qu'à remplacer β par $m\alpha + g$, cette dernière équation devient

$$\alpha x + (m\alpha + g)y - a\alpha - ax + a^2 = \left(r \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2.$$

Le pôle de la droite devra encore se trouver sur cette droite; par conséquent, si je désigne par x et y les coordonnées de ce point, il n'y a plus qu'à éliminer a, entre cette equation et l'équation (3); de la première, je tire $a = my + x$; en portant dans la deuxième, il vient

$$\alpha x + (m\alpha + g)y - (my + x)\alpha - (my + x)x + (my + x)^2 = \\ = \left(r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2}\right)^2.$$

ou bien en réduisant,

$$gy - (my + x)x + (my + x)^2 = \left(r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2}\right)^2 = \\ = r^2 + (my + x)^2 + b^2 \pm 2r\sqrt{(my + x)^2 + b^2},$$

d'où

$$gy - (my + x)x = r^2 + b^2 \pm 2r\sqrt{(my + x)^2 + b^2}, \qquad (4)$$

c'est l'équation du lieu cherché.

II. Les perpendiculaires abaissées du centre du cercle mobile sur la droite fixe rencontrent ces cercles en des points qui forment un lieu ; cherchons l'équation de ce lieu, pour cela il n'y a qu'à éliminer a entre les équations (2) et (3); en faisant cette élimination il vient

$$\left\{x - (my + x)\right\}^2 + y^2 = \left(r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2}\right)^2,$$

d'où

$$(m^2 + 1)y^2 = \left(r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2}\right)^2,$$

d'où

$$y\sqrt{1 + m^2} = r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2},$$

en faisant passer r dans le premier membre et élevant au carré

$$y^2(1 + m^2) + r^2 - 2ry\sqrt{1 + m^2} = (my + x)^2 + b^2.$$

d'où

$$y^2 + r^2 \pm 2ry\sqrt{1+m^2} = x^2 + 2mxy + b^2. \qquad (5)$$

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère. Je vais faire marcher en même temps la discussion de cette courbe et celle de la courbe demandée.

III. L'équation (4), dans le cas général du quatrième degré, ne présente rien de remarquable. Mais dans des hypothèses particulières, c'est-à-dire pour des positions remarquables des données de la question, le lieu prend diverses formes que nous allons examiner les unes après les autres

1° Supposons que le centre du cercle fixe se trouve à l'origine, nous aurons alors $b = 0$, les deux équations (4) et (5) deviennent alors

$$gy - (my + x)x = r^2 \pm 2r(my + x);$$

$$y^2 + r^2 \pm 2ry\sqrt{1+m^2} = x^2 + 2mxy.$$

Lorsque m est différent de zéro, c'est-à-dire lorsque la droite fixe n'est pas parallèle à l'axe des r, les deux équations qu'on déduirait de la première représentent deux hyperboles semblables et semblablement placées, vu les termes du deuxième degré qui sont les mêmes. On trouverait très facilement les coordonnées du centre et la longueur des axes de ces hyperboles. Ces deux hyperboles ont une asymptote parallèle à l'axe des y, les deux autres sont toutes les deux perpendiculaires à la direction de la droite fixe. La deuxième équation est toujours celle de deux hyperboles équilatères qui ne présentent rien de remarquable.

Si en même temps que nous avons $b = 0$, nous avions aussi $m = 0$, c'est-à-dire si la droite fixe DE était parallèle à l'axe des x, la première équation deviendrait (*fig.* 90)

$$gy - x^2 = r^2 \pm 2rx,$$

et la deuxième

$$y^2 + r^2 \pm 2ry = x^2.$$

Dans la première je fais passer x^2 dans le deuxième membre, et il vient

$$(x \pm r)^2 = gy,$$

$$\text{d'où } x = \pm r \pm \sqrt{gy}.$$

Le lieu est alors deux paraboles, égales, ayant pour paramètre g, dont les sommets sont aux deux points A,A′, extrémités du diamètre du cercle donné, et qui ont pour axes les deux perpendiculaires à l'extrémité de ce diamètre; ces deux paraboles se trouveront au-dessus de l'axe des x, si la droite DE se trouve au-dessus de cet axe; et elles se trouveront au-dessous, si la droite se trouve au-dessous. Ces deux paraboles couperont l'axe des y au même point c et à une distance de l'origine égale à $\frac{r^2}{g}$. Dans le cas de la figure ce point se trouvera dans l'intérieur du cercle donné.

Le deuxième lieu devient dans ce cas-ci quatre droites, que l'on obtiendra en formant le carré inscrit dans le cercle donné qui aurait les sommets aux points A_1 B_1 A_1' B_1'.

Si nous avions maintenant, outre $b = 0$ et $m = 0$, $g = 0$, le deuxième lieu ne changerait pas, ce qui est assez évident; le premier se réduirait aux deux droites AF, A′G, qui, dans le cas précédent, étaient les axes des deux paraboles que nous avions trouvées; c'est ce qu'aurait pu nous montrer l'intuition, puisque les deux paraboles que nous avions trouvées dans le cas précédent avaient pour paramètre g.

Si la droite donnée était perpendiculaire à l'axe des x, on trouverait l'axe des x et deux droites parallèles à l'axe des y.

Supposons maintenant que le rayon du cercle fixe devienne égal à zéro; c'est-à-dire qu'il se réduise à un point; examinons ce que devient le lieu dans les diverses hypothèses que nous avons discutées ci-dessus. Les équations des deux lieux que nous examinons deviennent

$$gy-(my+x)x=b^2, \qquad y^2=x^2+2mxy+b^2.$$

Lorsque nous avons $b \gtrless 0$, $m \gtrless 0$, $g \gtrless 0$, la première de ces équations représente une hyperbole ayant une asymptote parallèle à l'axe des y, et l'autre perpendiculaire à la droite donnée ; la deuxième est celle d'une hyperbole équilatère dont le centre est à l'origine des coordonnées. Si $b \gtrless 0$, $m=0$, $g \gtrless 0$, le premier lieu devient une parabole, ayant pour axe l'axe des y, et pour paramètre g ; le deuxième devient une hyperbole équilatère dont les asymptotes, seront les bissectrices des angles des axes et dont les sommets seront sur l'axe des y, à des distances de l'origine égales à b. Si $b \gtrless 0$; $m=0$, $g=0$, le premier lieu ne peut plus exister ; résultat que nous aurions pu prévoir, et le deuxième ne change pas. Supposons maintenant que b étant toujours différent de zéro, la droite fixe devienne parallèle à l'axe des y ; alors le premier lieu se réduit à l'axe des x et à une parallèle à l'axe des y, et le deuxième devient l'origine.

Soit $b=0$, $m \gtrless 0$, $g \gtrless 0$, alors le premier lieu devient une hyperbole passant par l'origine, et le deuxième se réduit à deux droites passant aussi par l'origine. Si $b=0$, $m=0$, $g \gtrless 0$, le premier lieu devient une parabole, ayant son sommet à l'origine, l'axe des y pour axe et g pour paramètre. Le deuxième se réduit aux bissectrices des angles des axes Enfin, si $b=0$, $m=0$, $g=0$, le premier lieu se réduit à l'axe des y, et le deuxième ne change pas. Voilà tous les cas qui peuvent se présenter lorsqu'on a un point fixe au lieu d'un cercle fixe.

Supposons maintenant, qu'au lieu d'un point fixe, nous ayons une droite fixe ; alors en prenant pour origine le point où cette droite rencontre celle sur laquelle doit se trouver le centre du cercle mobile, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, et désignant par $y = m'x$ l'équation de la droite à laquelle le cercle mobile doit être constamment tangent, et $y = mx + g$, l'autre droite, le lieu sera

$$(1 + m'^2)\, gy = (1 + m'^2)\,(my + x)\, x - (my + x)^2.$$

Equation qui représente dans le cas général une hyperbole passant par l'origine des coordonnées, et qu'on discuterait comme nous l'avons fait dans les cas précédents. On trouverait, dans tous les cas, une hyperbole, une parabole ou des lignes droites (*).