NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

THIBAULT

Théorèmes sur les figures planes ou sphériques d'égal périmètre ou d'égale surface. Démonstrations nouvelles et élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 480-486

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__480_1>

THÉORÈMES

SUR LES FIGURES PLANES OU SPHÉRIQUES D'ÉGAL PÉRIMÈTRE OU D'ÉGALE SURFACE.

Démonstrations nouvelles et élémentaires.

PAR M. THIBAULT,
Professeur, licencié ès sciences

Ces démonstrations, de la plus grande simplicité, n'exigent la connaissance d'aucun théorème relatif à la mesure des surfaces, ou à la théorie des parallèles.

Les figures sont représentées comme planes, mais on peut y substituer des figures sphériques tracées sur une même sphère, les lignes droites étant remplacées par des arcs de grands cercles. Seulement les théorèmes supposent que ces figures sphériques sont comprises chacune dans un seul hémisphère. Ils n'ont d'ailleurs besoin de démonstration que pour le cas où les figures ont des périmètres convexes, ce qui suppose que ces périmètres ne dépassent pas la circonférence d'un grand cercle.

I. *Lemme. fig.* 97. *Étant donné un polygone* ABCD...H *d'un périmètre* p, *on peut déterminer sur le prolongement d'un côté* AB *quelconque un point* I, *de manière que le polygone* AICD...H *ait un périmètre donné* $P > p$.

Car en faisant croître le côté AB d'une manière continue, on augmente aussi d'une manière continue le périmètre (*), depuis la valeur p jusqu'à l'infini (ou au moins jusqu'à ce qu'il soit égal à la circonférence d'un grand cercle s'il s'agit d'un polygone sphérique); dans l'intervalle ce périmètre est donc devenu égal à P.

II. *Théorème. De tous les polygones d'un même périmètre et d'un même nombre de côtés, le polygone régulier est le plus grand.*

Démontrons successivement que si un polygone ABCD...H n'a pas tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux, il ne peut être le plus grand parmi les isopérimètres d'un même nombre de côtés.

1° Soit $AB < BC$. *fig.* 98. Prenons sur BC le point M assez près de C pour qu'on ait encore $AB < BM$, et joignons AM. Faisons ensuite le triangle AMN symétrique de MAB, en prenant $AN = MB$, $MN = AB$. La substitution du triangle AMN à

(*) On peut faire croître le périmètre par degrés moindres que toute quantité donnée δ; il suffit pour cela d'augmenter AB par degrés, tels que BB′ égaux à δ. Car la différence des périmètres ABCD.. H, AB′CD.. .H est $BB' + B'C - BC$, quantité moindre que $2BB'$ ou δ, puisque l'on a $B'C < BB' + BC$.

la place de MAB ne produit pas de changement dans le périmètre ni dans la surface du polygone; mais alors ce polygone devient ANMCD...H qui a un angle rentrant NMC; car à cause de l'inégalité AB $<$ BM l'angle AMB est moindre que MAB ou AMN. Si donc on joint NC, le polygone ANCD...H a moindre périmètre et plus grande surface que ANMCD...H ou ABCD...H; donc (*Lemne* I) on peut déterminer le polygone AICD...H de même périmètre que ABCD...H, d'un même nombre de côtés, et plus grand que lui, puisqu'il contient ANCD...H.

2° Soit l'angle A $>$ B. *fig*. 99. Prenons sur BC le point M assez près de B pour que l'on ait encore l'angle HAM $>$ AMC; faisons ensuite le triangle AMN symétrique de MAB. La substitution du premier de ces triangles à la place du second ne produit pas de changement dans le périmetre ni dans la surface du polygone. Mais le nouveau polygone ANMCD...H a un angle rentrant HAN; car l'angle HAM étant plus grand que AMC, le supplément du premier est moindre que AMB ou MAN supplément du second. On en conclura donc, comme plus haut, que le polygone ABCD...H n'est pas le maximum.

III. *Théorème. De tous les polygones d'égale surface et d'un même nombre de côtes, le polygone régulier a le moindre perimètre.*

Car chacun de ces polygones, à l'exception de celui qui est regulier, pourrait être converti, comme dans la démonstration du théorème précédent, en un autre polygone d'égale surface et d'égal périmètre, ayant un angle rentrant, tel que ANMCD...H (*fig*. 98). En joignant NC on aurait le polygone ANCD...H plus grand que le précédent, et de moindre périmètre; puis, en retranchant de ce nouveau polygone une partie égale au triangle NMC au moyen d'une droite menée par C dans l'angle BCN; on le ramènerait à la même surface que le polygone considere. Mais alors son périmètre deviendrait moindre qu'auparavant, et serait à plus forte raison moindre que celui de ce dernier polygone.

IV. *Théorème. De deux polygones réguliers d'égal périmètre, celui qui a le plus de côtés est le plus grand.*

A égalité de surface ce dernier polygone aurait le moindre périmètre.

Soit ABCD...H (*fig.* 100) un polygone régulier de n côtés. Joignons le sommet A avec un point M pris sur BC, et faisons le triangle AMN symétrique de MAB. Par la substitution du premier de ces triangles à la place du second, le polygone ABCD...H est changé en un autre d'égal périmètre et d'égale surface ; mais alors ce polygone devient irrégulier et de $n+1$ côtés ; donc, à égalité de périmètre, il a moindre surface que le polygone régulier de $n+1$ côtés. De même celui-ci a moindre surface que le polygone régulier isopérimètre de $n+2$ côtés, et ainsi de suite, ce qui démontre la première partie de l'énoncé. On démontrerait de même la seconde partie.

V. *Théorème. Étant donnée une portion de périmètre d'une figure plane ou sphérique, pour terminer le périmètre par une ligne brisée de longueur donnée, d'un nombre de côtés* n, *et de manière que la figure ait la plus grande surface possible, il faut que la ligne brisée soit régulière (c'est-à-dire composée de côtés égaux comprenant des angles égaux).*

On démontrerait ce théorème comme celui du n° II.

La figure ainsi construite aurait aussi moindre périmètre, à égalité de surface, que si on l'eût terminée par une ligne irrégulière de n *côtés.*

On le démontrerait comme le théorème n° III.

Cette figure aurait aussi une plus grande surface à égalité de périmètre, ou moindre périmètre à égalité de surface que si on l'eût terminée par une ligne brisée quelconque ayant moins de n *côtés.*

On le démontrerait comme le théorème n° IV.

VI. *Théorème. De toutes les figures planes, ou sphériques (comprises dans un seul hémisphère), celle qui a la plus grande surface à égalité de périmètre est la figure terminée par une circonférence, savoir le cercle pour les figures planes, et la zone à une base pour les figures sphériques.*

La figure de la plus grande surface doit être terminée évidemment par une ligne convexe; il sera démontré que cette ligne est une circonférence, si l'on fait voir qu'on peut tracer une circonférence dont la distance à tout point de cette ligne soit moindre que toute quantité donnée δ.

Inscrivons dans la figure maximum, et en faisant au moins le tour complet du périmètre, une suite de cordes égales AB, BC, CD, ... HI (*), assez petites pour que chacune des parties du périmètre sous-tendues par ces cordes soit moindre que 2δ (*fig.* 101).

Il y a égalité entre tous les angles B, C, ...H compris entre ces cordes; car si deux angles successifs C, D n'étaient pas égaux, et qu'on menât la corde BE, on aurait un quadrilatère BCDE qu'on pourrait convertir en un autre plus grand, de mêmes côtés, donc les angles en C et D seraient égaux (V). Ce changement pourrait se faire sans rien changer aux autres parties de la figure totale; il en résulterait donc pour celle-ci une augmentation de surface, sans que le périmètre ait changé, ce qui est contraire à la supposition que la surface était d'abord un maximum.

Puisque les angles B, C, D, etc., sont égaux, si on les partage par des bissectrices, celles-ci détermineront avec les cordes des triangles isocèles égaux, ayant un sommet commun O (**). Les points A, C, D...H, I, étant à égale distance

---

(*) On doit remplacer les cordes par des arcs de grands cercles, s'il s'agit des figures sphériques.

(**) Cela suppose que les bissectrices se couperont, ce qui peut se démontrer indépendamment d'aucun théorème basé sur la théorie des parallèles. D'abord, à cause de l'égalité parfaite des parties du plan ou de la surface de sphère inter de O appartiennent à une même circonférence ; mais chacun des points situés sur le périmètre de la figure maximum entre les points B,C,...H,I se trouve séparé de l'un de ces derniers par une distance moindre que δ ; donc à fortiori sa distance la plus courte a la circonférence est moindre que δ.

La figure de moindre périmètre parmi celles qui ont la même surface est aussi terminee par une circonférence. Car si une figure A n'était pas ainsi terminée , elle serait moindre qu'une autre figure B d'égal périmètre comprise par une circonférence. On pourrait, au moyen d'une corde, partager B en deux segments, dont l'un serait équivalent à A. Mais ce segment aurait moindre périmètre que B , et par conséquent que A ; ainsi A ne serait pas la figure de moindre perimètre parmi celles qui ont une surface égale.

Corollaire. On peut toujours construire sur un plan ou sur une sphère donnée une circonférence de longueur donnée ; car parmi toutes les figures rectilignes ou sphériques d'un perimètre égal à cette longueur, si l'on considere celle qui a la plus grande surface possible , elle a pour perimètre une circonference qui satisfait à la question.

On demontrerait de même qu'*on peut y construire une circonférence comprenant un cercle ou une zone de surface donnee.*

VII. *Un polygone rectiligne ou spherique inscriptible* P *a une plus grande surface que tout autre polygone* P' *rectiligne ou sphérique de mêmes côtes.*

Ayant trace la circonference circonscrite a P (*fig.* 102 ,

---

ceptées entre BC, CD, etc , et les bissectrices, égalite qu'on peut demontrer par la superposition, si deux bissectrices consecutives ne se rencontraient pas, il en serait de meme de toutes les autres Or si aucune d'elles ne rencontrait la precedente, on ne pourrait joindre le point A a aucun point de la bissectrice de C, prolongee indefiniment sans couper celle de B. A fortiori ne pourrait-on pas sans couper cette derniere joindre le point A a la bissectrice de D. Ce raisonnement repete pour toutes les bissectrices, on conclurait que l'on ne peut mener une droite du point A a aucun des points C , D . H, I sans couper la bissectrice de l'angle B, ce qui est evidemment faux pour ce dernier point formons respectivement sur les côtés de P′ des segments A′, B′, etc., égaux aux segments A , B , etc., interceptés entre la circonférence et les côtés de P. Les polygones P, P′ réunis aux segments construits sur leurs côtés constituent deux figures d'égal périmètre; mais la première a une plus grande surface, puisqu'elle est terminée par une circonférence (VI) ; donc en retranchant de part et d'autre les segments égaux sur-ajoutés, on aura le polygone P plus grand que le polygone P′.